

Travaux dirigés 2 - Polynômes

Exercice 1

- 1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose que $P(0) = P'(0) = \dots = P^{(k-1)}(0) = 0$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = X^k Q(X)$$

On pourra étudier les coefficients de P .

- 2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$, on suppose que $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer en se ramenant au cas précédent qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - a)^k Q(X)$$

- 3) Soit $a < b$ deux réels, et Φ l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{cases}.$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

- 4) En étudiant Φ , montrer que pour tout réels (y_a, y'_a, y_b, y'_b) , il existe un unique polynôme P de degré inférieur à 3 tel que

$$P(a) = y_a, \quad P'(a) = y'_a, \quad P(b) = y_b, \quad P'(b) = y'_b$$

Exercice 2

On fixe une suite de points dans $\mathbb{R}$:

$$x_0 < x'_0 < x_1 < x'_1 < \dots < x_n < x'_n.$$

- 1) On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto \left(\frac{P(x_0)+P(x'_0)}{2}, \frac{P(x_1)+P(x'_1)}{2}, \dots, \frac{P(x_n)+P(x'_n)}{2} \right) \end{cases}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

- 2) Soit $P \in \ker(\Phi)$. Montrer que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, il existe $z_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P(z_i) = 0$.
- 3) En déduire la propriété suivante : pour tout $(m_0, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout i :

$$\frac{P(x_i) + P(x'_i)}{2} = m_i$$

- 4) Est-ce toujours vrai si les $(x_i, x'_i)_{i=0, \dots, n}$ ne sont pas ordonnés de cette manière ?