

Travaux dirigés 1 - Polynômes

Exercice 1

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$X^k - a^k = (X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell.$$

Pour $k = 1$ c'est évident, pour $k = 2$ on retrouve l'identité $X^2 - a^2 = (X - a)(X + a)$. En général, on a :

$$(X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(X^{k-\ell} a^\ell - X^{k-1-\ell} a^{\ell+1} \right)$$

On fait un changement d'indice ($\ell = \ell' - 1$) sur le deuxième terme :

$$(X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell = \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-\ell} a^\ell - \sum_{\ell'=1}^k X^{k-\ell'} a^{\ell'}$$

On observe que tous les termes associés à $\ell/\ell' \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ s'annulent, il ne reste que le premier terme de la première somme, et le dernier terme de la seconde :

$$(X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell = X^{k-0} a^0 - X^{k-k} a^k = X^k - a^k$$

- 2) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que

$$P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$$

On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^n P_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} P(X) - P(a) &= \sum_{k=0}^n P_k X^k - \sum_{k=0}^n P_k a^k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(P_k (X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell \right) \end{aligned}$$

On factorise le $X - a$ de chaque terme :

$$P(X) - P(a) = (X - a) \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{k-1} P_k X^{k-1-\ell} a^\ell$$

Le facteur à droite est bien un polynôme $Q(X)$.

- 3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme qui s'annule en des points distincts $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = Q(X) \prod_{j=1}^n (X - a_j)$$

On procède par récurrence sur n . On vient de montrer le cas $n = 1$. Supposons maintenant que ce soit vérifié jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$, et que $P \in \mathbb{R}[X]$ s'annule en des points distincts $a_1, \dots, a_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = Q(X) \prod_{j=1}^n (X - a_j)$$

De plus, en $X = a_{n+1}$, on a

$$0 = P(a_{n+1}) = Q(a_{n+1}) \prod_{j=1}^n (a_{n+1} - a_j)$$

et les facteurs $a_{n+1} - a_j$, $i = 1, \dots, n$, sont tous non-nuls par hypothèse. Donc $Q(a_{n+1}) = 0$. En appliquant la question précédente à Q , il existe donc $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q(X) = (X - a_{n+1})\tilde{Q}(X).$$

On a donc

$$P(X) = Q(X) \prod_{j=1}^n (X - a_j) = \tilde{Q}(X) \prod_{j=1}^{n+1} (X - a_j)$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 2

Soit $(x_i)_{i=1,2,3} = (0, 1, 3)$, $(y_i)_{i=1,2,3} = (1, -1, 1)$.

- 1) Trouver l'ensemble des polynômes P de degré au plus 2 tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .
On cherche P sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Cela donne le système

$$\begin{cases} a0^2 + b0 + c &= 1 \\ a1^2 + b1 + c &= -1 \\ a3^2 + b3 + c &= 1 \end{cases}$$

donc en remplaçant $c = 1$ dans les deuxième et troisièmes lignes

$$\begin{cases} c &= 1 \\ a + b &= -2 \\ 3a + b &= 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent (par l'opération $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$) à

$$\begin{cases} c &= 1 \\ a + b &= -2 \\ 2a &= 2 \end{cases}$$

On trouve alors une unique solution $(a, b, c) = (1, -3, 1)$, et l'unique polynôme solution est $P^{sol}(X) = X^2 - 3X + 1$

- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme vérifiant $P(x_i) = 0$ pour tout i . Montrer, en utilisant l'exercice précédent, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X) = \lambda X(X - 1)(X - 3)$$

L'exercice précédent nous donne l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)X(X - 1)(X - 3)$. Si Q est nul, on obtient le résultat avec $\lambda = 0$.

Supposons que Q est non-nul. Alors le terme de droite est de degré $\deg(Q) + 3$ (par propriété du degré). Or, le terme de gauche est de degré au plus 3. Donc Q est un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante λ , ce qui conclut.

- 3) En déduire l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i . En question 1 on a identifié une solution P^{sol} . Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ une autre solution. Alors $P - P^{sol}$ est un polynôme de degré au plus 3 qui s'annule en 0, 1, 3, qui par la question 2 est nécessairement de la forme

$$P(X) - P^{sol}(X) = \lambda X(X-1)(X-3)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc

$$P(X) = P^{sol}(X) + \lambda X(X-1)(X-3)$$

Réciproquement, n'importe quel polynôme de cette forme est bien solution. On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\{P^{sol}(X) + \lambda X(X-1)(X-3), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3

On se donne les trois fonctions $1, X^2, X^4$, et E l'espace vectoriel engendré par ces trois fonctions.

- 1) Existe-t-il un élément f de E tel que $f(-2) = 3, f(0) = 1, f(1) = 2$?
On note $f(x) = a + bx^2 + cx^4$. $f(0) = 1$ donne $a = 1$, il reste à résoudre

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ 4b + 16c = 2 \end{cases}$$

qui admet bien une unique solution $(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$.

- 2) Même question avec $f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = 2$.
Cela donne cette fois

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ b + c = 2 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solution

Exercice 4

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (i \sin(\theta))^k$$

On utilise la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (i \sin(\theta))^k \end{aligned}$$

- 2) En déduire qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout θ , on a

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

On pourra prendre la partie réelle de l'identité précédente. On prend la partie réelle de chaque côté, on a

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \Re(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \\ &= \Re \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (i \sin(\theta))^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} \Re(i^k) \sin(\theta)^k\end{aligned}$$

$\Re(i^k)$ vaut 0 lorsque k est impair, et $(-1)^{k/2}$ lorsque k est pair. On a donc :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{k=0 \text{ t.q. } 2|k}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (-1)^{k/2} \sin(\theta)^k \\ &= \sum_{k=0 \text{ t.q. } 2|n}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (-1)^{k/2} (1 - \cos(\theta)^2)^{k/2}\end{aligned}$$

Le terme de droite est une expression polynomiale en $\cos(\theta)$: plus précisément on a

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

où

$$T_n(X) = \sum_{k=0 \text{ t.q. } 2|n}^n \binom{n}{k} X^{n-k} (X^2 - 1)^{k/2}$$

- 3) Calculer T_n pour $n = 0, 1, 2, 3$. Quel est le degré de T_n ? On a $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$.

Dans l'expression de T_n : chaque terme $X^{n-k} (X^2 - 1)^{k/2}$ est de degré n avec un coefficient dominant 1. T_n est donc degré au plus n , et son coefficient de degré n est $\sum_{k=0 \text{ t.q. } 2|k}^n \binom{n}{k}$, qui est bien non-nul.