

Exercice 1 - Interpolation 2d

Étant donné un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ et des points

$$\begin{aligned} a &\leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b \\ c &\leq y_0 < y_1 < \dots < y_m \leq d \end{aligned}$$

Pour chaque $(i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$, on se donne une valeur $z_{i,j} \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner l'expression du polynôme $P_{n,m}$ de degré au plus n en x , au plus m en y , tel que $P_{n,m}(x_i, y_j) = z_{i,j}$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et $j = 0, \dots, m$.
- 2) On fixe $a = c = -2$, $b = d = 2$, $n = 4$, $m = 6$, et des points $(x_i)_i, (y_j)_j$ équidistants. On fixe de plus $z_{i,j} = \varphi(x_i, y_j)$ où

$$\varphi(x, y) = e^{-(x+1)^2 - (y+1)^2} + e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2}$$

Tracer le polynôme d'interpolation associé.

On représentera sur une même figure le graphe $(x, y, P_{n,m}(x, y))$ avec la fonction `plot_surface` de `matplotlib`, et les points d'interpolation $(x_i, y_j, z_{i,j})$ avec la fonction `scatter`.

Exercice 2 - Interpolation approximative

Soit I un intervalle, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x_{0,m} < x_{1,m} < \dots < x_{m,m}$ des points d'interpolation dans l'intervalle I . Soit $n \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i = 0, \dots, m, \quad P(x_{i,m}) = g(x_{i,m}),$$

ce qui n'est pas possible en général. Notons $c = (c_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients du polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$, et $B = (x_{i,m}^j)_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$. Comme on ne peut pas résoudre le système

$$Bc = y$$

où $y = (g(x_{i,m}))_{0 \leq i \leq m}$, on regarde le système réduit

$$B^* Bc = B^* y$$

où B^* est la matrice transposée de B .

- 1) Écrire une fonction prenant en entrée n, m , et résout le système réduit associé aux données $x_{i,m} = -5 + \frac{10i}{m}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dans l'intervalle $I = [-5, 5]$.
- 2) On note $P_{n,m}$ le polynôme solution du problème ci-dessus. Afficher sur une même figure le graphe de g , et les graphes de $P_{n,m}$ à n fixé pour plusieurs valeurs de m . On pourra prendre $n = 15$ et des valeurs de m de 15 à 60.
- 3) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note

$$E_{n,m}(P) = \sum_{i=0}^m |P(x_{i,m}) - g(x_{i,m})|^2$$

Montrer que si P est solution du problème d'optimisation

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} E_{n,m}(P),$$

alors on a

$$\frac{\partial E_{n,m}}{\partial c_k}(P) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

- 4) En déduire que $P = P_{n,m}$.
- 5) Conjecturer vers quoi tend $P_{n,m}$ quand $m \rightarrow +\infty$ à n fixé. Peut-on calculer cette limite directement ?