

Travaux pratiques 2 - Interpolation

Exercice 1

Étant donné des valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinctes dans un intervalle $[a, b]$, on définit le polynôme de Lagrange

$$L_i(X) = \prod_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

- 1) On suppose $a = -1$, $b = 1$, et on choisit des points équidistants $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$. Tracer sur un même graphe tous les polynômes $(L_i)_{i=0, \dots, n}$.
On tracera le graphe sur l'intervalle $[a, b]$. On pourra prendre $n = 5, 10, 20$
- 2) Faire la même chose avec des points choisis aléatoirement dans $[-1, 1]$ (on pourra utiliser la fonction `np.random.random(k)`, qui génère un tableau de k nombre choisis aléatoirement dans $[0, 1]$), puis les points

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right).$$

Que constate-t-on ?

Étant donné des valeurs $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ distinctes dans un intervalle $[a, b]$, on définit le polynôme de Newton

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Par convention, $N_0(x) = 1$.

Exercice 2

On considère un polynôme donné sous la forme

$$P(x) = \delta_0 N_0(x) + \delta_1 N_1(x) + \dots + \delta_n N_n(x) \quad (1)$$

pour des coefficients $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$.

- 1) Ecrire un algorithme d'évaluation de P en $\mathcal{O}(n)$ opérations, en utilisant l'écriture

$$P(x) = \delta_0 + (x - x_0)(\delta_1 + (x - x_1)(\delta_2 + (x - x_2)(\delta_3 + (\dots + (x - x_{n-1})\delta_n)) \dots)) \quad (2)$$

- 2) Ecrire une fonction qui prend en entrée la liste $[x_0, \dots, x_n]$, la liste $[\delta_0, \dots, \delta_n]$, et une valeur $x \in \mathbb{R}$, et renvoie l'évaluation de $P(x)$ grâce à la méthode (2).

On s'assurera de son fonctionnement sur des exemples simples !

Exercice 3

On garde les notations de l'exercice précédent. Le but est ici de calculer le polynôme d'interpolation associé aux abscisses $(x_0, \dots, x_n)$ et aux ordonnées $(y_0, \dots, y_n)$ par la méthode de Newton. On admet le résultat suivant : en notant P_k le polynôme d'interpolation sur les $(k+1)$ premiers points, on a

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \delta_j N_j(x)$$

où $\delta_j = D\left(\begin{smallmatrix} x_0, \dots, x_j \\ y_0, \dots, y_j \end{smallmatrix}\right)$ est la différence divisées, définie par les relations

$$D\left(\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}\right) = y_i, \quad D\left(\begin{smallmatrix} x_i, \dots, x_j \\ y_i, \dots, y_j \end{smallmatrix}\right) = \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x_{i+1}, \dots, x_j \\ y_{i+1}, \dots, y_j \end{smallmatrix}\right) - D\left(\begin{smallmatrix} x_i, \dots, x_{j-1} \\ y_i, \dots, y_{j-1} \end{smallmatrix}\right)}{x_j - x_i}$$

- 1) Écrire une fonction qui prend en entrée les liste $[x_0, \dots, x_n]$ et $[y_0, \dots, y_n]$, et renvoie la liste des coefficients $[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n]$.
- 2) Soit $f(x) = \frac{1}{1+3x^2}$. On fixe $x_i = \frac{2i-n}{n}$ (points de équadistants dans l'intervalle $[-1, 1]$). Afficher sur une même figure le graphe $(x, f(x))$, les points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ (par une commande `plt.plot([x_i], [f(x_i)], 'o')`), et les graphes des polynômes $(x, P_k(x))$ pour $k = 0, \dots, n$.
- 3*) Montrer la formule admise sur des δ_j .