

Travaux dirigés 1 - Polynômes

Exercice 1

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$X^k - a^k = (X - a) \sum_{\ell=0}^{k-1} X^{k-1-\ell} a^\ell.$$

- 2) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que

$$P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$$

- 3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme qui s'annule en des points distincts $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = Q(X) \prod_{j=1}^n (X - a_j)$$

Exercice 2

Soit $(x_i)_{i=1,2,3} = (0, 1, 3)$, $(y_i)_{i=1,2,3} = (1, -1, 1)$.

- 1) Trouver l'ensemble des polynômes P de degré au plus 2 tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme vérifiant $P(x_i) = 0$ pour tout i . Montrer, en utilisant l'exercice précédent, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X) = \lambda X(X - 1)(X - 3)$$

- 3) En déduire l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i .

Exercice 3

On se donne les trois fonctions $1, X^2, X^4$, et E l'espace vectoriel engendré par ces trois fonctions.

- 1) Existe-t-il un élément f de E tel que $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$?
- 2) Même question avec $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

Exercice 4

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} (i \sin(\theta))^k$$

- 2) En déduire qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout θ , on a

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

On pourra prendre la partie réelle de l'identité précédente.

- 3) Calculer T_n pour $n = 0, 1, 2, 3$. Quel est le degré de T_n ?