Travaux pratiques 4 - Interpolation polynomiale

Exercice 1 - Calcul de Spline cubique

On rappelle les polynômes de Hermite élémentaires sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\
\tilde{H}_0(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\
H_1(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\
\tilde{H}_1(x) &= -x^2 + x^3
\end{aligned}$$

1) Écrire une fonction qui prend en entrée $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (supposés distincts), des valeurs $y_\alpha, y'_\alpha, y_\beta, y'_\beta$, et un réel $x \in \mathbb{R}$, et qui renvoie la valeur $h(x)$ où $h \in \mathbb{R}_3[X]$ est défini par

$$h(\alpha) = y_\alpha,\ h'(\alpha) = y'_\alpha,\ h(\beta) = y_\beta,\ h'(\beta) = y'_\beta$$

On utilisera les polynômes élémentaires donnés ci-dessus.

2) Écrire une fonction qui prend en entrée une suite d'abscisses $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, d'ordonnées $y_0, \ldots, y_n$, de pentes $y'_0, \ldots, y'_n$, un réel x, et évalue $h(x)$ où h est la fonction définie de la manière suivante :
$h|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et $h(x_i) = y_i$, $h'(x_i) = y'_i$, $h(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $h'(x_{i+1}) = y'_{i+1}$.

3) Tester cela sur le cas suivant : $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ est une subdivision de $[-5,5]$, et $y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$, où

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}.$$

Exercice 2

Soit $\sigma > 0$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$, on pose

$$E(f) = \int_{-1}^{1} (f''(x)^2 + \sigma^2 f'(x)^2) dx$$

On s'interesse au problème d'optimisation

$$\inf \left\{ E(f), f \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R}) \text{ tel que } \underbrace{f(-1) = 1,\ f'(-1) = 1,\ f(1) = -1,\ f'(1) = 1}_{\text{(C)}} \right\} \tag{1}$$

1) Montrer que si f est dans $\mathcal{C}^4([-1,1], \mathbb{R})$, vérifie la contrainte (C), et $g \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ vérifie $g(-1) = g'(-1) = g(1) = g'(1) = 0$, alors $E(f+g) = E(f) + E(g) + 2\int_{-1}^{+1} (f'''' - \sigma^2 f'')\, g$.

2) En déduire que si f est une combinaison linéaire des fonctions $1, x, e^{\sigma x}, e^{-\sigma x}$, et vérifie la contrainte (C), alors f est solution du problème d'optimisation.

3) Écrire une fonction prenant en entrée une valeur $\sigma > 0$, qui trouve des coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) := a + bx + ce^{\sigma x} + de^{-\sigma x}$$

est solution du problème.

4) Afficher sur un même graphe les solutions obtenues pour differentes valeurs de σ. Que se passe-t-il quand $\sigma \to 0$? Et quand $\sigma \to +\infty$?

5) Peut-on résoudre le même problème avec $E(f) = \int_{-1}^{1} (f''(x)^2 - \sigma^2 f'(x)^2) dx$? On pourra chercher des solutions combinaison de $1, x, \cos(\sigma x), \sin(\sigma x)$.

Exercice 3 - Calcul de Spline naturel

On se donne des points d'interpolation $x_i = i\delta$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. On cherche des valeurs $(y'_0, y'_1, \ldots, y'_n) \in \mathbb{R}$ telles que, en notant h le spline cubique associé, alors

$$h''(x_0) = h''(x_n) = 0$$

et

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ h''(x_i^-) = h''(x_i^+)$$

Ici $f(x^+)$ désigne la limite à droite de la fonction f en x, et $f(x^-)$ désigne sa limite à gauche.

1) Rappeler comment ces conditions sont équivalentes à un système linéaire de la forme

$$My' = z$$

où $y' = (y'_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, M est une matrice à identifier et z un vecteur à identifier.

2) Écrire une fonction prenant en entrée les $(y_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, et renvoie la liste des $(y'_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ qui résout le problème ci-dessus. *On utilisera pour l'instant la fonction linalg.solve : d'autre méthodes de résolution sont explorées ensuite.*

3) Tester cela pour des y_i choisis aléatoirement (selon une loi uniforme) dans $[-1, 1]$. On affichera la courbe obtenue.

4) On cherche à résoudre le système de la question 1) par la méthode introduite dans l'exercice 2 du TD5. On décompose donc $M = D + N$ où D est une matrice diagonale, et N une matrice de diagonale nulle. La solution du système est obtenue par la méthode d'itération suivante :

$$\begin{cases} y'^{(0)} = 0 \\ y'^{(p+1)} = D^{-1}(z - Ny'^{(p)}) \end{cases}$$

Écrire une fonction prenant en entrée (en plus de tous les paramètres $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n}$) un nombre entier $p \in \mathbb{N}^*$, qui calcule la suite $y'^{(0)}, y'^{(1)}, \ldots, y'^{(p)}$. On affichera le graphe de $\log \|y'^{(k)} - y'\|$ en fonction de $k = 0, 1, 2, \ldots, p$ Quelle est la vitesse de convergence ?
On prendra garde à ce que chaque itération ait une complexité $\mathcal{O}(n)$.

5) Adapter la question 1) (et la suite) à des points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ non-équidistants. Comment change la vitesse de convergence ?