**Travaux dirigés 6**

## Exercice 1

Soit $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_1, \dots, t_n$ des réels distincts, $y_1, y_2, \dots, y_n$ des réels, et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ des réels strictement positifs. On note

$$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\,(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$$

l'espace des fonctions obtenues comme combinaison linéaires des $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$. On cherche à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{\phi \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left|\phi(t_i) - y_i\right|^2.$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$\text{Pour tout } \phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j \in \mathcal{E}, \text{ si } (\phi(t_1), \dots, \phi(t_n)) = (0, \dots, 0), \text{ alors les coefficients } c_j \text{ sont nuls.}$$

Enfin, on note $A_{i,j} = \phi_j(t_i)$ pour tout $(i, j)$ tels que $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

1) Soit $\phi \in \mathcal{E}$, que l'on décompose sous la forme

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} x_j \phi_j$$

pour des coefficients $(x_j)_{j=1,\dots,m}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left|\phi(t_i) - y_i\right|^2 = \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle,$$

où $\Omega$ est une matrice de taille $n$ à identifier. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.
On a $\phi(t_i) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(t_i) x_j$, donc $\phi(t_i) = (Ax)_i$. Puis,

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \left|\phi(t_i) - y_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \,(Ax - y)_i^2$$

On pose $\Omega_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\omega_i$ si $i = j$. Alors

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \,(Ax - y)_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \Omega_{i,j} (Ax - y)_i (Ax - b)_j = \sum_{i=1}^{n} (Ax - y)_i (\Omega(Ax - y))_i = \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle.$$

2) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, on a $\langle Ah, \Omega Ah \rangle \ge 0$.
Soit $h \in \mathbb{R}^m$, notons $v = Ah$, alors

$$\langle Ah, \Omega Ah \rangle = \langle v, \Omega v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i (\Omega v)_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i v_i^2 \ge 0$$

Dans la dernière inégalité, on utilise le fait que $\omega_i \ge 0$ pour tout $i$.

3) On note $J(x) = \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^m$ vérifie

$$A^* \Omega A x = A^* \Omega y, \tag{1}$$

alors pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, on a $J(x+h) \geq J(x)$.
Soit $x, h \in \mathbb{R}^m$, on calcule directement

$$\begin{aligned} J(x+h) &= \langle A(x+h) - y, \Omega(A(x+h) - y)\rangle \\ &= \langle Ax - y + Ah, \Omega(Ax - y) + \Omega Ah\rangle \\ &= \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle + \langle Ah, \Omega(Ax - y)\rangle + \langle Ax - y, \Omega Ah\rangle + \langle Ah, \Omega Ah\rangle \\ &= J(x) + \langle Ah, \Omega Ah\rangle + 2\langle A^*\Omega(Ax - y), h\rangle \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne on a utilisé la propriété de la matrice transposée. Par la question précédente, $\langle Ax - y, \Omega Ah\rangle \geq 0$ pour tout $h$. Si $x$ est solution de (1), alors $A^*\Omega(Ax - y) = 0$, il reste donc juste $J(x+h) \geq J(x)$ : $x$ est bien solution du problème d'optimisation.

4) Montrer que le système (1) est inversible. On commence par montrer que $A$ est injective. En effet, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $Ax = 0$. Cela signifie que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(Ax)_i = 0$, donc $\sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j = 0$, ou encore (en notant $\phi = \sum_{j=1}^m x_j \phi_j$) :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \; \phi(t_i) = 0.$$

Selon la propriété de l'énoncé, cela implique que $x = 0$.

La matrice $A^*\Omega A$ est bien carrée, de taille $m$ : cette matrice est inversible si et seulement si elle est injective. Soit $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, par injectivité de $A$ on a $Ax \neq 0$. On note $z := Ax \in \mathbb{R}^n$, alors on a vu précedemment que

$$\langle A^*\Omega Ax, x\rangle = \langle \Omega Ax, Ax\rangle = \langle z, \Omega z\rangle = \sum_{i=1}^n \omega_i z_i^2$$

Au moins l'un des $z_i$ est non-nul, et comme les $\omega_i$ sont tous non-nul, cela implique que la quantité de droite est non-nulle. Donc $A^*\Omega Ax \neq 0$, donc $A^*\Omega A$ est bien injective.

## Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. On pose, pour tout $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$|||M||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

1) Montrer que pour tout $M, N \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a $|||MN||| \leq |||M||| \times |||N|||$. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|MNx\| &= \|M(Nx)\| \\ &\leq |||M||| \|Nx\| \\ &\leq |||M||| \times |||N||| \times \|x\| \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{\|MNx\|}{\|x\|} \leq |||M||| \times |||N|||.$$

On prend le sup de cette inégalité pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ : cela donne exactement

$$|||MN||| \leq |||M||| \times |||N|||.$$

2) Pour tout $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{Cond}(M) = |||M||| \times \left|\left|\left| M^{-1} \right|\right|\right|.$$

Montre que pour tout $M$, on a $\mathrm{Cond}(M) \geq 1$.
On a $|||I_n||| = 1$ (car $\|I_n x\| = \|x\|$ pour tout $x$. Donc

$$1 = \left|\left|\left| MM^{-1} \right|\right|\right| \leq |||M||| \times \left|\left|\left| M^{-1} \right|\right|\right| = \mathrm{Cond}(M).$$

3) Soit $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Delta b \in \mathbb{R}^n$. On résout les systèmes

$$Mx = b \text{ et } M(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(M) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

On a $Mx = b$, $M(\Delta x) = \Delta b$. Par la définition de $|||\cdot|||$, on a

$$\|\Delta x\| = \|M^{-1}\Delta b\| \leq \left|\left|\left| M^{-1} \right|\right|\right| \times \|\Delta b\|$$

et

$$\|b\| = \|Mx\| \leq |||M||| \times \|x\|$$

On a donc

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{|||M^{-1}||| \times \|\Delta b\|}{|||M|||^{-1}\|b\|} = \mathrm{Cond}(M) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

4) Application : on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Calculer les $x, \Delta x$ associés, et comparer les erreurs relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ et $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$. On prendra la norme Euclidienne.
L'inverse de $M$ peut être calculé directement :

$$M^{-1} = \frac{1}{0.01} \begin{pmatrix} 1.01 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $x = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\Delta x = M^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'erreur relative $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ est donc $\frac{0.01}{\sqrt{2}} \sim 0.7\%$, tandis que l'erreur relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ est $\frac{\sqrt{2}}{1} > 100\%$.