Travaux dirigés 6

Exercice 1

Soit $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_n$ des réels distincts, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels, et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des réels strictement positifs. On note

$$\mathcal{E} = \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$$

l'espace des fonctions obtenues comme combinaison linéaires des $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$. On cherche à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{\phi \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left|\phi(t_i) - y_i\right|^2.$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$\text{Pour tout } \phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j \in \mathcal{E}, \text{ si } (\phi(t_1), \ldots, \phi(t_n)) = (0, \ldots, 0), \text{ alors les coefficients } c_j \text{ sont nuls.}$$

Enfin, on note $A_{i,j} = \phi_j(t_i)$ pour tout (i,j) tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

1) Soit $\phi \in \mathcal{E}$, que l'on décompose sous la forme

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} x_j \phi_j$$

pour des coefficients $(x_j)_{j=1,\ldots,m}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left|\phi(t_i) - y_i\right|^2 = \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle,$$

où Ω est une matrice de taille n à identifier. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, on a $\langle Ah, \Omega Ah \rangle \geq 0$.

3) On note $J(x) = \langle Ax - y, \Omega(Ax - y)\rangle$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^m$ vérifie

$$A^* \Omega A x = A^* \Omega y, \tag{1}$$

alors pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, on a $J(x + h) \geq J(x)$.

4) Montrer que le système (1) est inversible.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. On pose, pour tout $M \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$|||M||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

1) Montrer que pour tout $M, N \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a $|||MN||| \leq |||M||| \times |||N|||$.

2) Pour tout $M \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, on pose

$$\operatorname{Cond}(M) = |||M||| \times \left|\left|\left|M^{-1}\right|\right|\right|.$$

Montre que pour tout M, on a $\operatorname{Cond}(M) \geq 1$.

3) Soit $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Delta b \in \mathbb{R}^n$. On résout les systèmes

$$Mx = b \text{ et } M(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(M) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

4) Application : on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

Calculer les $x, \Delta x$ associés, et comparer les erreurs relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ et $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$. On prendra la norme Euclidienne.