Travaux dirigés 5 - Splines

On rappelle la formule suivante : si $h \in \mathbb{R}_3[X]$, alors pour tout $a \neq b$ on a

$$h''(a) = \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(b) - 3h(a) - 2(b-a)h'(a) - (b-a)h'(b)\right)$$
$$h''(b) = \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(a) - 3h(b) + 2(b-a)h'(b) + (b-a)h'(a)\right).$$

Exercice 1 - Splines périodiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $y_0, \ldots, y_{n-1}$ des réels. On cherche la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ minimisant l'énergie

$$\int_0^1 f''(x)^2 dx$$

sous la contrainte

$$f \text{ est } 1-\text{périodique et pour tout } i = 0, 1, \ldots, n-1,\ f(i/n) = y_i.$$

On rappelle qu'une fonction est 1-périodique lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$.

Pour simplifier les notations, on pourra noter pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $i[n]$ le reste de la division de i par n et $y_i = y_{i[n]}$.

1) Montrer que si h est une fonction 1-périodique, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, égale à un polynôme de degré ≤ 3 sur chaque intervalle $[i/n, (i+1)/n]$, alors c'est une solution du problème d'optimisation.

Soit h une telle fonction, et f une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-périodique, vérifiant $f(i/n) = y_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (avec $y_i = y_{i[n]}$). L'objectif est de montrer que $\int_0^1 f''(x)^2 dx \geq \int_0^1 h''(x)^2 dx$. On pose

$$g(x) = f(x) - h(x).$$

Alors $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g est 1-périodique et $g(i/n) = 0$ pour tout i. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f''(x)^2 - h''(x)^2)dx &= \int_0^1 ((h''(x) + g''(x))^2 - h''(x)^2)dx = \int_0^1 (\underbrace{g''(x)^2}_{\geq 0} + 2g''(x)h''(x))dx \\
&\geq 2\int_0^1 h''(x)g''(x)dx \\
&= 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} h''(x)g''(x)dx \\
&= \underbrace{2\sum_{i=0}^{n-1} \left[h''(x)g'(x)\right]_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}}_{\text{telescopage}} - 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} h'''(x)g'(x)dx \\
&= 2\underbrace{\left(h''(1)g'(1) - h''(0)g'(0)\right)}_{=0 \text{ par périodicité}} \\
&+ 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(h'''\left(\left(\frac{i}{n}\right)^+\right)\underbrace{g\left(\frac{i}{n}\right)}_{=0} - h'''\left(\left(\frac{i+1}{n}\right)^-\right)\underbrace{g\left(\frac{i+1}{n}\right)}_{=0}\right) \\
&+ 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \underbrace{h''''(x)}_{=0} g(x)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a donc bien $\int_0^1 f''(x)^2 dx \geq \int_0^1 h''(x)^2 dx$.

2) Soient $y'_0, y'_1, \dots, y'_{n-1}$ des réels. Montrer qu'il existe une unique fonction 1-périodique $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, on a

$$h(i/n) = y_i, \ h'(i/n) = y'_i$$

et $h|_{[i/n,(i+1)/n]}$ est un polynôme de degré au plus 3.
On notera $y'_n = y'_0$ (et plus généralement par convention $y'_i = y'_{i[n]}$). On va définir la fonction h par

$$h(x) = P_i(x) \text{ lorsque } x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$$

où $P_i \in \mathbb{R}_3[X]$ est un polynôme vérifiant

$$P_i\left(\frac{i}{n}\right) = y_i, \ P'_i\left(\frac{i}{n}\right) = y'_i, \ P_i\left(\frac{i+1}{n}\right) = y_{i+1}, \ P'_i\left(\frac{i+1}{n}\right) = y'_{i+1}$$

Selon le théorème d'existence et unicité des polynôme de Hermite du cours, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant cela. Quand on définit h ainsi, h est bien 1-périodique (car $h(x+1)$ est cubique sur chaque $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, avec les même valeur et dérivées que h en $\frac{i}{n}$, $\frac{i+1}{n}$, et est donc identique à h par unicité des polynômes de Hermite).
Enfin, h est bien $\mathcal{C}^1$: h est polynomiale (donc infiniment dérivable) sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, et h, h' admette les même limites y_i, y'_i à gauche et à droite de $\frac{i}{n}$.

3) Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si $(y'_i)_{i=0,\dots,n-1}$ vérifie un système linéaire à identifier.
Comme h est déjà $\mathcal{C}^2$ sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, il suffit de vérifier que la limite de h'' en chaque $\frac{i}{n}$ est bien la même à droite et à gauche, ce qui se ramène au système

$$h''\left(\left(\frac{i}{n}\right)^+\right) = h''\left(\left(\frac{i}{n}\right)^-\right), \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

Par périodicité, il suffit en fait de vérifier cela en $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. En remplaçant h par son expression par le polynôme P_i sur $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$, cela donne

$$P''_{i-1}\left(\frac{i}{n}\right) = P''_i\left(\frac{i}{n}\right), \ i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

On peut maintenant utiliser les formules en haut du TD, avec $(P, a, b) = \left(P_{i-1}, \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ et $\left(P_i, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. On élimine directement le facteur $2n^2$ qui apparaît devant tous les termes, et on obtient le système suivant

$$3(y_{i-1} - y_i) + \frac{2}{n}y'_i + \frac{1}{n}y'_{i-1} = 3(y_{i+1} - y_i) - \frac{2}{n}y'_i - \frac{1}{n}y'_{i+1}, \ i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

On sépare les y'_i à gauche, y_i à droite

$$\frac{1}{n}\left(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1}\right) = 3(y_{i+1} - y_{i-1}), \ i = 0, \dots, n-1$$

On peut résumer ça en un système

$$MY' = Z$$

où $M \in M_n(\mathbb{R})$, $Y' \in \mathbb{R}^n$, $Z \in \mathbb{R}^n$ sont indexé sur $\{0, \dots, n-1\}$, de la forme

$$Z_i = 3(y_{i+1} - y_{i+1}),$$

$$Y'_i = y'_i,$$

et

$$M_{i,j} = \frac{1}{n}\begin{cases} 1 \text{ si } j = i \pm 1 \bmod n \\ 4 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$M = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \dots & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Montrer que ce système linéaire est inversible.
Cette matrice est à diagonale dominante ($|M_{ii}| - \sum_{j \neq i} |M_{ij}| = 2 > 0$ pour tout i), donc inversible selon le théorème du cours.

Exercice 2 - Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, tel que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$|M_{i,i}| > \sum_{j \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{i\}} |M_{i,j}|$$

On note $M = D + N$, où D est une matrice diagonale, et N est une matrice de diagonale nulle. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on cherche une méthode de résolution du système

$$Mx = b \tag{1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note aussi $\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

1) Montrer que x est solution de (1) si et seulement si $\Phi(x) = x$, où Φ est la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(x) = D^{-1}(b - Nx)$$

$Mx = b$ si et seulement si $Dx = b - Nx$. La matrice D est inversible (car chaque $M_{i,i}$ est non-nul donc $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{M_{1,1}}, \frac{1}{M_{2,2}}, \dots, \frac{1}{M_{n,n}}\right)$ est bien définie). C'est donc équivalent à $x = D^{-1}(b - Nx)$.

2) Montrer qu'il existe un facteur $\sigma \in [0, 1[$ à identifier tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq \sigma \|x - y\|_\infty.$$

Soit $z = x - y$. On a alors $\Phi(x) - \Phi(y) = -D^{-1}N(x - y) = -D^{-1}Nz$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} \left|(-D^{-1}Nz)_i\right| &= \left| \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} \frac{M_{i,j}}{M_{i,i}} z_j \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} \frac{|M_{i,j}|}{|M_{i,i}|} |z_j| \\ &\leq \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} \frac{|M_{i,j}|}{|M_{i,i}|} \|z\|_\infty \end{aligned}$$

On note $\sigma = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{1\le j\le n,\ j\neq i} \frac{|M_{i,j}|}{|M_{i,i}|}$. par hypothèse $\sigma < 1$ et on a montré que $|(-D^{-1}Nz)_i| \le \sigma\|z\|_\infty$ pour tout i, donc $\|(-D^{-1}Nz)_i\|_\infty \le \sigma\|z\|$. En remplaçant la définition de z on obtient bien

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \le \sigma\|x-y\|_\infty$$

3) Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On définit par récurrence $x^{(k)}$ par $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$. Montrer que $x^{(k)}$ converge vers la solution à (1) quand $k \to +\infty$.
On sait (par le résultat du cours) que M est inversible : il existe donc un unique $x^{sol} \in \mathbb{R}^n$ tel que $Mx^{sol} = b$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x^{(k+1)} - x^{sol}\|_\infty = \|\Phi(x^{(k)}) - \Phi(x^{sol})\|_\infty \le \sigma\|x^{(k)} - x^{sol}\|_\infty.$$

Et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\|x^{(k)} - x^{sol}\|_\infty \le \sigma^k\|x^{(0)} - x^{sol}\|_\infty$. Comme $\sigma < 1$, on obtient bien $\|x^{(k)} - x^{sol}\|_\infty \to 0$.

4) Cela fonctionne-t-il toujours si l'hypothèse sur M est plutôt $|M_{j,j}| > \sum_{i\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{j\}} |M_{i,j}|$?
Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a $-D^{-1}N = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier la propriété de la question 2) n'est pas vérifiée avec $b = y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut pourtant montrer que l'itération marche bien en général.
Astuce : on fait le changement de variable $Dx = y$, alors il faut résoudre

$$y = \Psi(y)$$

où $\Psi(y) = b - ND^{-1}y$. On a alors

$$(ND^{-1}y)_i = \sum_{1\le j\le n,\ j\neq i} \frac{M_{i,j}}{M_{j,j}} y$$

Et donc en notant $\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|$, on a

$$\|\psi(y) - \psi(z)\|_1 \le \sigma\|y-z\|_1$$

Le reste fonctionne pareil.