Travaux dirigés 5 - Splines

On rappelle la formule suivante : si $h \in \mathbb{R}_3[X]$, alors pour tout $a \neq b$ on a

$$h''(a) = \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(b) - 3h(a) - 2(b-a)h'(a) - (b-a)h'(b)\right)$$
$$h''(b) = \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(a) - 3h(b) + 2(b-a)h'(b) + (b-a)h'(a)\right).$$

Exercice 1 - Splines périodiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $y_0, \ldots, y_{n-1}$ des réels. On cherche la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ minimisant l'énergie

$$\int_0^1 f''(x)^2 dx$$

sous la contrainte

$$f \text{ est } 1-\text{périodique et pour tout } i = 0, 1, \ldots, n-1,\ f(i/n) = y_i.$$

On rappelle qu'une fonction est 1-périodique lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$.

Pour simplifier les notations, on pourra noter pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $i[n]$ le reste de la division de i par n et $y_i = y_{i[n]}$.

1) Montrer que si h est une fonction 1-périodique, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, égale à un polynôme de degré ≤ 3 sur chaque intervalle $[i/n, (i+1)/n]$, alors c'est une solution du problème d'optimisation.
2) Soient $y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-1}$ des réels. Montrer qu'il existe une unique fonction 1-périodique $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$, on a
$$h(i/n) = y_i,\ h'(i/n) = y'_i$$
et $h|_{[i/n,(i+1)/n]}$ est un polynôme de degré au plus 3.
3) Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si $(y'_i)_{i=0,\ldots,n-1}$ vérifie un système linéaire à identifier.
4) Montrer que ce système linéaire est inversible.

Exercice 2 - Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, tel que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$|M_{i,i}| > \sum_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} |M_{i,j}|$$

On note $M = D + N$, où D est une matrice diagonale, et N est une matrice de diagonale nulle. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, on cherche une méthode de résolution du système

$$Mx = b \tag{1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note aussi $\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

1) Montrer que x est solution de (1) si et seulement si $\Phi(x) = x$, où Φ est la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$\Phi(x) = D^{-1}(b - Nx)$$
2) Montrer qu'il existe un facteur $\sigma \in [0, 1[$ à identifier tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq \sigma \|x - y\|_\infty.$$
3) Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On définit par récurrence $x^{(k)}$ par $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$. Montrer que $x^{(k)}$ converge vers la solution à (1) quand $k \to +\infty$.
4) Cela fonctionne-t-il toujours si l'hypothèse sur M est plutôt $|M_{j,j}| > \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}} |M_{i,j}|$?