Travaux dirigés 4 - Polynôme de Hermite

Exercice 1

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, trouver tous les polynomes $P(x)$ de degrés inférieur ou égal à 2 tels que

$$P(0) = a,\ P'(1) = b,\ P(2) = c.$$

On écrit $P(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$ où $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. Alors cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} p_0 = a \\ p_1 + 2p_2 = b \\ p_0 + 2p_1 + 4p_2 = c \end{cases}$$

qui part substitution est équivalent à

$$\begin{cases} p_0 = a \\ p_1 + 2p_2 = b \\ p_1 + 2p_2 = \frac{c-a}{2} \end{cases}$$

Ce système n'est pas inversible, et on peut séparer deux cas : si $b = \frac{c-a}{2}$, alors on se ramène au système

$$\begin{cases} p_0 = a \\ p_1 + 2p_2 = b \end{cases}$$

l'ensemble des solutions est de dimension 1 et en notant par $p_2 = t$ un paramètre réel, celui-ci est de la forme

$$\{P(X) + tQ(X), t \in \mathbb{R}\}$$

où $P(X) = a + bX$, $Q(X) = -2X + X^2$.
Si $b \neq \frac{c-a}{2}$, alors il n'y a pas de solutions.

Exercice 2

On donne les polynômes élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ \tilde{H}_0(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ H_1(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ \tilde{H}_1(x) &= -x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Ceux-ci vérifient les propriétés suivantes, pour tout $i, j \in \{0, 1\}$:

- Si $i \neq j$, alors $H_i(j) = H_i'(j) = \tilde{H}_i(j) = \tilde{H}_i'(j) = 0$.
- $H_i(i) = 1$, $\tilde{H}_i(i) = 1$, et $H_i'(i) = \tilde{H}_i(i) = 0$.

1) Soit $h \in \mathbb{R}_3[X]$, montrer que

$$h''(0) = 2\left(3h(1) - 3h(0) - 2h'(0) - h'(1)\right)$$

Considérons le polynôme

$$g(X) = h(X) - h(0)H_0(X) - h'(0)\tilde{H}_0(X) - h(1)H_1(X) - h'(1)\tilde{H}_1(X)$$

Alors $g \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifie $g(0) = g'(0) = g(1) = g'(1) = 0$: par unicité du polynôme d'interpolation de Hermite, g est le polynôme nul et donc

$$h(X) = h(0)H_0(X) + h'(0)\tilde{H}_0(X) + h(1)H_1(X) + h'(1)\tilde{H}_1(X)$$

On a alors

$$\begin{aligned} h''(0) &= h(0)H_0''(0) + h'(0)\tilde{H}_0''(0) + h(1)H_1''(0) + h'(1)\tilde{H}_1''(0) \\ &= -6h(0) - 4h'(0) + 6h(1) - 2h'(1) \end{aligned}$$

ce qui, après factorisation, est le résultat.

2) Montrer la formule admise en cours : soit $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, si $h \in \mathbb{R}_3[X]$, alors

$$\begin{aligned} h''(a) &= \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(b) - 3h(a) - 2(b-a)h'(a) - (b-a)h'(b)\right) \\ h''(b) &= \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(a) - 3h(b) + 2(b-a)h'(b) + (b-a)h'(a)\right) \end{aligned}$$

On pourra commencer par justifier qu'il suffit de montrer la première formule, et que la deuxième en découle en permutant les rôles de a et b. Puis on montrera qu'on peut se ramener au cas où $a = 0$, $b = 1$, et utiliser la question précédente.

Supposons que la première formule soit vraie. Alors en inversant les rôles de a et b on obtient

$$\begin{aligned} h''(b) &= \frac{2}{(a-b)^2}\left(3h(a) - 3h(b) - 2(a-b)h'(b) - (a-b)h'(a)\right) \\ &= \frac{2}{(b-a)^2}\left(3h(a) - 3h(b) + 2(b-a)h'(b) + (b-a)h'(a)\right) \end{aligned}$$

ce qui est la deuxième formule. Il suffit donc de montrer la première.

Posons maintenant $g(X) = h(a + (b-a)X)$, tel

$$\begin{aligned} &g(0) = h(a),\ g'(0) = (b-a)h'(a),\ g''(0) = (b-a)^2h''(a) \\ &g(1) = h(b),\ g'(1) = (b-a)h'(b), \end{aligned}$$

Alors selon la question précédente,

$$g''(0) = 2\left(3g(1) - 3g(0) - 2g'(0) - g'(1)\right)$$

et donc

$$(b-a)^2h''(a) = 2\left(3h(b) - 3h(a) - 2(b-a)h'(a) - (b-a)h'(b)\right),$$

ce qui est le résultat.

Exercice 3

On cherche la fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ qui minimise l'énergie

$$E(f) := \int_0^1 |f''(x)|^2 dx$$

sous la contrainte

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f(1) = 0.$$

1) Justifier que si h est un polynôme de degré au plus 3 qui vérifie

$$h(0) = 0,\ h'(0) = 1,\ h(1) = 0,\ h''(1) = 0,$$

alors c'est une solution du problème.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ une autre fonction vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(1) = 0$. On pose $g = f - h$: $g \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ vérifie

$$g(0) = g'(0) = g(1) = 0$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
E(f)-E(h)=E(h+g)-E(h) &= \int_0^1 \left(|h''(x)+g''(x)|^2-|h''(x)|^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(2h''(x)g''(x)+g''(x)^2\right)dx \\
&\geq 2\int_0^1 h''(x)g''(x)dx
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $g''(x)^2 \geq 0$. Cette inégalité est une égalité exactement lorsque g'' est identiquement nulle.

On fait maintenant des intégrations part partie :

$$\begin{aligned}
E(f)-E(h) &\geq 2\int_0^1 h''(x)g''(x)dx \\
&= 2[h''(x)g'(x)]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 h'''(x)g'(x)dx \\
&= 2\underbrace{h''(1)}_{0}g'(1)-h''(0)\underbrace{g'(0)}_{0} - 2[h'''(x)g(x)]_{x=0}^{x=1} + 2\int_0^1 \underbrace{h''''(x)}_{0}g(x)dx \\
&= -2h'''(1)\underbrace{g(1)}_{0} + 2h'''(0)\underbrace{g(0)}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a donc $E(f) \geq E(h)$: h est solution du problème d'optimisation.

2) Montrer qu'il existe un tel polynôme h.
Comme h s'annule à l'ordre 1 en $X=0$, et à l'ordre 1 en $x=1$, et que le degré de h est 3, on peut chercher h sous la forme

$$h(x) = Q(x)x(1-x)$$

où Q est de degré 1, donc de la forme $Q(x) = ax+b$. On a $h'(x) = Q'(x)(x-x^2)+Q(x)(1-2x)$, et la condition $h'(0)=1$ donne donc $Q(0)=1$, donc $b=1$.
$h''(x) = \underbrace{Q''(x)}_{0}(x-x^2)+2Q'(x)(1-2x)-2Q(x)$, et la condition $h''(1)=0$ donne donc

$$-2Q'(1)-2Q(1)=0$$

donc $-2a-2(a+b)=0$. En remplaçant $b=1$, on obtient $a=-\frac{1}{2}$.

La solution est donc

$$h(x) = \left(1-\frac{x}{2}\right)x\,(1-x)\,.$$

3) La solution du problème d'optimisation est-elle unique ? On reprend les notations de la question 1. On a vu que $E(h+g) \geq E(h)$, avec égalité si et seulement si $g''(x)=0$ pour tout x. g est donc une fonction affine. Sachant que $g(0)=0$ et $g(1)=0$, nécessairement g est la fonction nulle. La solution h est donc unique.