Travaux dirigés 3 - Polynômes d'interpolation

Exercice 1

Calculer, pour les $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$, $y = (y_i)_{i=0,\dots,n}$ donnés, le polynôme d'interpolation associé dans la base et de Newton (on ne cherchera pas à développer les polynômes de Newton).

1) $x = (-1, 1, 2, 4)$, $y = (-1, -1, 1, 2)$.
2) $x = (0, 1, 2, 5)$, $y = (1, -1, 1, -1)$.
3) $x = (0, 1, 2, 6)$, $y = (1, -1, 1, 1)$.

On ne fait que redonner les solutions, le calcul en direct avec la méthode de Newton a été fait en TD :

1) $P(x) = -N_0(x) + 0N_1(x) + \frac{2}{3}N_2(x) - \frac{7}{30}N_3(x)$
2) $P(x) = N_0(x) - 2N_1(x) + 2N_2(x) - \frac{8}{15}N_3(x)$.
3) Ici, il suffit de refaire le calcul précédent sur la dernière ligne seulement. $P(x) = N_0(x) - 2N_1(x) + 2N_2(x) - \frac{2}{5}N_3(x)$

Exercice 2

Soient $x_0 < x'_0 < x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \ldots < x_n < x'_n$ des réels. Soit $m_0, m_1, \ldots, m_n$ des réels. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, on ait

$$P(x_i) - P(x'_i) = m_i$$

On étudie l'application linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0) - P(x'_0), P(x_1) - P(x'_1), \ldots, P(x_n) - P(x'_n)) \end{cases} .$$

Rappel : la dimension de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est $n+2$. Le théorème du rang nous donne alors $\mathrm{rg}(\Phi) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = n + 2 - \dim(\mathrm{Ker}(\Phi))$. Notre objectif est de montrer que l'image de Φ est $\mathbb{R}^{n+1}$ entier, c'est-à-dire que de rang de Φ est $\mathbb{R}^{n+1}$, ce qui revient donc à montrer que le noyau de Φ est de dimension 1.

Le noyau de Φ contient l'ensemble des polynômes constants, qui est de dimension 1. Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$ on a

$$P(x_i) = P(x'_i)$$

donc par théorème de Rolle il existe $x''_i \in]x_i, x'_i[$ tel que $P'(x''_i) = 0$. Vu l'ordonnement des x_i, x'_i, on sait que les x''_i sont disjoints : P' est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui s'annule en $n + 1$ point, donc nécessairement le polynôme nul, et P est donc constant. L'espace des polynôme constants (qui est de dimension 1) est donc bien le noyau de Φ, ce qui conclut.

Exercice 3

Soit $a < b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$, et pour chaque entier n, P_n est un polynôme de degré au plus n tel que $f - P_n$ s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

1) On suppose que $f(x) = \cos(2x)$. Montrer que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On utilise le résultat du cours : P_n prend la même valeur que f en $n+1$ points, notés $(x_{0,n}, \dots, x_{n,n})$, et c'est donc le polynôme d'interpolation associé à ces point. Par la formule d'estimation d'erreur du cours, on a

$$\|f - P_n\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\sup_{a\leq x\leq b} \prod_{j=0}^n |x - x_{j,n}|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$$

La seule information dont on dispose sur les $x_{j,n}$ est que $|x - x_{j,n}| < (b-a)$. On a aussi

$$f^{(n)}(x) = 2^n \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(2x) \text{ si } 2|n \\ (-1)^{(n-1)/2}\sin(2x) \text{ sinon} \end{cases}$$

On majore donc

$$\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])} \leq 2^{n+1}$$

Alors

$$\|f - P_n\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{(2(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui tend toujours vers 0 par croissance comparée : il n'y a pas de conditions sur a et b.

2) On suppose que $0 < a < b$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que si $b < 2a$, alors :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette fois, on a $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. Le maximum de $|f^{(n)}|$ sur un intervalle $[a,b]$ est donc atteint lorsque $\frac{1}{x^{n+1}}$ est maximal, donc en $x = a$ (par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^{n+1}}$), donc la formule d'erreur donne

$$\begin{aligned}\|f - P_n\|_{L^\infty([a,b])} &\leq \frac{\sup_{a\leq x\leq b} \prod_{j=0}^n |x - x_{j,n}|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])} \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!a^{n+2}} \text{ car } |x - x_{j,n}| \leq b-a \text{ pour tout j} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{b-a}{a}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers 0 lorsque $\frac{b-a}{a} < 1$, c'est-à-dire $b < 2a$.

3) On suppose que $a < 0 < b$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Trouver une condition sur a, b pour que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette condition peut-elle être affaiblie si $P_n - f$ s'annule exactement sur les points de Chebychev de l'intervalle $[a,b]$? La formule d'erreur nous donne l'estimation

$$\|f - P_n\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\sup_{a\leq x\leq b} \prod_{j=0}^n |x - x_{j,n}|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$$

Il suffit alors d'estimer la valeur de $\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$. On commence par décomposer f en élements plus simples à dériver : on a $x^2+1=(x+i)(x-i)$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{(x-i)(x+i)} \\ &= \frac{1}{2i}\frac{(x+i)-(x-i)}{(x-i)(x+i)} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)\end{aligned}$$

On a alors

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right)$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x-i|\geq|\mathrm{Im}(x-i)|=1$ et $|x+i|\geq|\mathrm{Im}(x+i)|=1$, donc

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{|(-1)^n n!|}{|2i|}\left(\frac{1}{|x-i|^{n+1}}+\frac{1}{|x+i|^{n+1}}\right) \leq \frac{n!}{2}(1+1)=n!$$

et l'erreur est donc estimée par

$$\begin{aligned}\|f-P_n\|_{L^\infty([a,b])} &\leq \frac{\sup_{a\leq x\leq b}\prod_{j=0}^n |x-x_{j,n}|}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])} \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)! \\ &\leq (b-a)^{n+1}\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 quand $|b-a|<1$.
Maintenant, si les points d'annulation de $f-P_n$ sont en les points de Chebychev de $[a,b]$, alors cette fois on a (résultat du cours, ou TP précédent) $\sup_{a\leq x\leq b}\prod_{j=0}^n |x-x_{j,n}| \leq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$ et donc

$$\|f-P_n\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{2}{n+1}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

On obtient donc la convergence sous la condition $b-a<4$. En fait, les exemples traités en TP montre que ce n'est pas une condition nécessaire : peu importe la valeur de a,b, l'interpolation de Chebychev de $\frac{1}{1+x^2}$ converge sur tout intervalle.