Partiel - Algèbre linéaire pour le graphique et la CAO

Une feuille manuscrite est autorisée. Toutes les réponses seront justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1

Soit $c \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On suppose que $\|c'(t)\| = 1$ pour tout t. Lorsque c est paramétrée par longueur d'arc, la courbure de c (notée κ_c) est définie par

$$c''(t) = \kappa_c(t)c'(t)^\perp,$$

où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

1) Supposons qu'il existe $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que pour tout t, on a $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$. Montrer que $\theta'(t) = \kappa_c(t)$.

   On calcule $c''(t)$:

   $$c''(t) = \begin{pmatrix} -\theta'(t)\sin(\theta(t)) \\ \theta'(t)\cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = \theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

   et

   $$c'(t)^\perp = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

   par définition. On a donc

   $$\kappa_c(t)c'(t)^\perp = c''(t) = \theta'(t)c'(t)^\perp$$

   Comme $c'(t)$ est non-nul pour tout t, on peut identifier $\kappa_c(t) = \theta'(t)$.

2) En déduire la courbure de $c(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(s^2)ds \\ \int_0^t \sin(s^2)ds \end{pmatrix}$.

   On a $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$. En particulier, pour tout t on a

   $$\|c'(t)\| = \sqrt{cos(t^2)^2 + \sin(t^2)^2} = 1$$

   donc c est bien paramétrée par longueur d'arc. On identifie alors $\theta(t) = t^2$, donc

   $$\kappa_c(t) = \theta'(t) = 2t.$$

Exercice 2

On fixe $a < b$ deux réels, et $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant les trois conditions

   $$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a) \text{ et } P(b) = f(b).$$

   On considère l'application

   $$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(a), P'(a), P(b)) \end{cases}$$

Φ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension (on rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est bien de dimension 3). La question revient à montrer que Φ est bijective.
Par théorème du rang, Φ est bijective si et seulement si Φ est injective (on rappelle pourquoi : si Φ est injective alors son rang est $\text{rang}(\Phi) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\Phi)) = 3 - 0 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc son image est $\mathbb{R}^3$ entier, donc Φ est surjective).

Il reste donc à montrer que Φ est injective. Supposons que $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie $\Phi(P) = (0, 0, 0)$. Comme $P(a) = P(b)$, par théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$.

P' est alors une fonction affine qui s'annule en a et c, donc P' est le polynôme nul. Donc P est constant, et comme P s'annule en a, P est donc nul. Cela conclut la preuve de l'injectivité, donc de la surjectivité.

2) Soit $x \in]a, b[$, on note $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction

$$g : z \mapsto f(z) - P(z) - \frac{(z-a)^2(z-b)}{(x-a)^2(x-b)}(f(x) - P(x))$$

Montrer que g s'annule en au moins trois points distincts de $[a, b]$, et que $g'(a) = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
g(a) &= \underbrace{f(a) - P(a)}_{=0} - \frac{(a-a)^2(a-b)}{(x-a)^2(x-b)}(f(x) - P(x)) = 0 \\
g(b) &= \underbrace{f(b) - P(b)}_{=0} - \frac{(b-a)^2(b-b)}{(x-a)^2(x-b)}(f(x) - P(x)) = 0 \\
g(x) &= f(x) - P(x) - \underbrace{\frac{(x-a)^2(x-b)}{(x-a)^2(x-b)}}_{=1}(f(x) - P(x)) \\
&= f(x) - P(x) - (f(x) - P(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et la dérivée de $(z-a)^2(z-b)$ en $z = a$ est $2(a-a)(a-b) + (a-a)^2 = 0$, donc

$$g'(a) = \underbrace{f'(a) - P'(a)}_{=0} - 0 = 0$$

3) Montrer que g''' s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
Comme $g(a) = g(x)$ et $g(x) = g(b)$, selon le théorème de Rolle il existe $c \in]a, x[$, $d \in]x, b[$ tels que $g'(c) = g'(d) = 0$. Puis, on a

$$g'(a) = g'(c) = g'(d)$$

donc par théorème de Rolle appliqué sur $[a, c], [c, d]$, g'' va s'annuler en un point $s \in]a, c[$, et un point de $t \in]c, d[$. En appliquant une dernière fois le théorème de Rolle sur $[s, t]$, on trouve $\zeta \in]s, t[\subset [a, b]$ tel que $g'''(\zeta) = 0$.

4) Soit $x \in]a, b[$, P le polynôme de la question 1), montrer que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(x-a)^2(b-x)}{6} \sup_{z \in [a,b]} |f'''(z)|.$$

Soit ζ le point trouvé dans la question précédente. On a $g'''(\zeta) = 0$, ce qui se réécrit en

$$f'''(\zeta) - P'''(\zeta) - \frac{\frac{d^3}{d\zeta^3}(\zeta-a)^2(\zeta-b)}{(x-a)^2(x-b)}(f(x) - P(x)) = 0$$

On remplace $P'''(\zeta) = 0$ (car P est de degré au plus 2) et $\frac{d^3}{d\zeta^3}(\zeta - a)^2(\zeta - b) = 6$, on a donc

$$f'''(\zeta) - \frac{6}{(x-a)^2(x-b)}(f(x) - P(x)) = 0$$

ce qui se réarrange en

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)}{6} f'''(\zeta)$$

On conclut par :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x-a|^2|x-b|}{6}|f'''(\zeta)| \leq \frac{(x-a)^2(b-x)}{6} \sup_{[a,b]} |f'''|$$

Car pour $x \in [a, b]$, on a $|x - b| = b - x$.

Exercice 3

Soit $f(x) = xe^x$.

1) Trouver (et montrer) une expression explicite de $f^{(n)}(x)$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
On commence par calculer les premières dérivées : $f'(x) = xe^x + e^x$, $f''(x) = xe^x + 2e^x$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x$$

On a vérifié cela pour $n = 0$ (et $n = 1, 2$ mais ce n'est pas nécessaire). Supposons maintenant que cela est vérifié pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = (xe^x + ne^x)' = xe^x + e^x + ne^x = xe^x + (n+1)e^x$$

2) Soit $a > 0$. Pour tout n, on note P_n un polynôme de degré n tel que $P_n - f$ s'annule au moins $n + 1$ fois dans l'intervalle $[-a, a]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

$P_n - f$ s'annule en des points distincts $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$. Comme P_n est de degré n, cela signifie qu'on peut identifier de manière unique P_n comme étant le polynôme d'interpolation de Lagrange des points $(x_i, f(x_i))_{i=0,1,\ldots,n}$.

Selon la formule d'erreur, on a

$$\sup_{x\in[-a,a]} |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sup_{x\in[-a,a]} \prod_{i=0}^n |x - x_i|}{(n+1)!} \sup_{[-a,a]} |f^{(n+1)}|$$

Comme x et les x_i sont pris dans $[-a, a]$, on a toujours $|x - x_i| \leq 2a$, donc $\sup_{x\in[-a,a]} \prod |x - x_i| \leq (2a)^{n+1}$. On a aussi, grâce à la question précédente,

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f^{(n+1)}(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \underbrace{|x + n + 1|}_{\leq(a+n+1)} \underbrace{e^x}_{\leq e^a} | \leq (a + n + 1)e^a$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-a,a]} |P_n(x) - f(x)| &\leq \frac{\sup_{x\in[-a,a]} \prod_{i=0}^n |x - x_i|}{(n+1)!} \sup_{[-a,a]} |f^{(n+1)}| \\ &\leq \frac{(2a)^{n+1}(a+n+1)}{(n+1)!} e^a\end{aligned}$$

Par croissance comparée, ce dernier terme tend vers 0. On peut par exemple dire que

$$\left(\frac{(2a)^{n+2}(a+n+2)}{(n+2)!} e^a\right) / \left(\frac{(2a)^{n+1}(a+n+1)}{(n+1)!} e^a\right) = \frac{2a}{n+2} \frac{a+n+2}{a+n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$