Travaux pratiques 3 - Interpolation polynomiale

Exercice 1 - Interpolation approximative

Soit I un intervalle, $g : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x_{0,m} < x_{1,m} < \ldots < x_{m,m}$ des points d'interpolation dans l'intervalle I. Soit $n \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i = 0, \ldots, m, \ P(x_{i,m}) \approx g(x_{i,m}).$$

Notons $c = (c_k)_{0 \le k \le n}$ les coefficients du polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$, et $B = (x_{i,m}^j)_{0 \le i \le m, 0 \le j \le n}$. En général on ne peut pas résoudre le système

$$Bc = y$$

où $y = (g(x_{i,m}))_{0 \le i \le m}$. Néanmoins, on peut résoudre le système réduit

$$B^* Bc = B^* y$$

où B^* est la matrice transposée de B.

1) Ecrire une fonction prenant en entrée n, m, et résout le système associé aux données $x_{i,m} = -5 + \frac{10i}{m}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dans l'intervalle $I = [-5, 5]$.
2) On note $P_{n,m}$ le polynôme solution du problème ci-dessus. Afficher sur un même figure le graphe de g, et les graphes de $P_{n,m}$ à n fixé pour plusieurs valeurs de m. On pourra prendre $n = 15$ et des valeurs de m de 15 à 60.
3) Montrer que si P est solution du problème d'optimisation

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \sum_{i=0}^{m} |P(x_{i,m}) - g(x_{i,m})|^2,$$

alors $P = P_{n,m}$. On pourra dériver la quantité ci-dessus selon chaque coefficient de P.
4) Conjecturer vers quoi tend $P_{n,m}$ quand $m \to +\infty$ (à n fixé). Peut-on calculer cette limite directement ? Et si on ne prend pas des points $(x_{i,m})_{0 \le i \le m}$ équidistants, comment cela change-t-il ?

Exercice 2 - Interpolation 2d

Étant donné un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ et des points

$$a \le x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le b$$
$$c \le y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_m \le d$$

Pour chaque $(i, j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\}$, on se donne une valeur $z_{i,j} \in \mathbb{R}$.

1) Donner l'expression du polynôme $P_{n,m}$ de degré n en x, m en y, tel que $P_{n,m}(x_i, y_j) = z_{i,j}$ pour tout i, j.
2) On fixe $a = c = -2$, $b = d = 2$, $n = 4$, $m = 6$, et des points $(x_i)_i$, $(y_j)_j$ équidistants. On fixe de plus $z_{i,j} = \varphi(x_i, y_i)$ où

$$\varphi(x, y) = e^{-(x+1)^2-(y+1)^2} + e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$$

Tracer le polynôme d'interpolation associé.
On représentera sur une même figure le graphe $(x, y, P_n(x, y))$ avec la fonction plot_surface de matplotlib, et les points d'interpolation $(x_i, y_j, z_{i,j})$ avec la fonction scatter.