

Travaux pratiques 2 - Interpolation polynomiale

Exercice 1

Étant donné des valeurs $x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{n,n}$ distinctes dans un intervalle $[a, b]$, on définit le polynôme de Lagrange

$$L_{i,n}(X) = \prod_{j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}} \frac{X - x_{j,n}}{x_{i,n} - x_{j,n}}.$$

- 1) On suppose $a = -1$, $b = 1$, et on choisit des points équidistants tels que $x_{0,n} = a$, $x_{n,n} = b$. Tracer sur un même graphe tous les polynômes $(L_{i,n})_{i=0,\dots,n}$.
On tracera le graphe sur l'intervalle $[a, b]$. On pourra prendre $n = 5, 10, 20$
- 2) Faire la même chose avec des points choisis aléatoirement dans $[-1, 1]$ (on pourra utiliser la fonction `np.random.random(...)`), puis les points

$$x_{i,n} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right).$$

Que constate-t-on ?

Exercice 2 - Matrices en python

Le type *matrix* est une spécialisation du type *array*, munie des opérations matricielles usuel. Voici un code d'exemple ; on peut constater que l'opération `*` appliquée à des *array* de même dimension multiplie les éléments deux-à-deux, tandis que l'opération `*` entre matrices donne une vraie multiplication matricielle.

```
1 import numpy as np
2
3 A=np.array([[1,2],[3,4]])
4 M=np.matrix(A)
5 #M et A sont deux tableaux, avec la precision de traiter M comme une matrice
6
7 print("A*A=",A*A)
8 print("M*M=",np.matrix(M)*np.matrix(M))
9
10 b=np.matrix([[4],[5]])
11 print("M*b=",M*b)
12
13 x=np.linalg.solve(M,b)#Resolution du systeme Mx=b
14 print("Mx-b=",M*x-b)
```

On pourra trouver le code sur

- 1) Écrire une fonction prenant en entrée deux tableaux $x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ et $y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ de même taille, et renvoie des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que pour tout $i = 0, \dots, n$:

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i.$$

On admet que tant que les x_i sont distincts, il existe toujours une unique solution $(a_0, \dots, a_n)$.

- 2) Soit $a = 2$, on note $-a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$ une subdivision de $[-a, a]$ par des points équidistants. Tracer sur une même figure le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$, et le graphe du polynôme de degré inférieur ou égal à n passant par tous les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$.
On testera différentes valeurs de n . Comment le polynôme se comporte-t-il quand n est grand ?
- 3) Faire de même avec $a = 5$. Qu'observe-t-on sur le comportement du polynôme ?