Travaux pratiques 1 - Courbes du plan

Exercice 1 - Tracé de courbe

Ecrire une fonction prenant en entrée :

- Une fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
- Deux réels $a < b$.
- Un nombre d'échantillon $N \in \mathbb{N}^*$.

qui affiche le tracé de la courbe $c([a,b])$ en reliant les points $c(t_i)_{i=0,\dots,N}$ où $(t_i)_{i=0\dots,N}$ est une subdivision de points équidistants de $[a,b]$. On pourra prendre comme exemples :

a) $c(t) = \begin{pmatrix} (1-\cos(t)))\cos(t) \\ (1-\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$, $(a,b) = (0, 2\pi)$.

b) $c(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)/(1+\cos(t)^2) \\ \sin(t)\cos(t)/(1+\cos(t)^2) \end{pmatrix}$, $(a,b) = (0, 2\pi)$.

c) $c(t) = \begin{pmatrix} t^p \\ t^q \end{pmatrix}$, $(a,b) = (-1,1)$, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ des entiers positifs.

Exercice 2 - Points equidistants

Dans cet exercice, on pourra prendre comme exemple

$$c(t) = (\cos(5t^2), \sin(5t)), 0 \leq t \leq 1$$

1) Coder une fonction prenant en entrée une fonction $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et un nombre de pas $N > 0$, et renvoie une approximation de la longueur de le courbe $c([0,1])$ basée sur un échantillonage de la courbe sur les points $(c(i/N))_{i=0,1,\dots,N}$.
2) Tracer la courbe $c([0,1])$ et les points $(c(i/K))_{i=0,1,\dots,K}$ pour $K = 30$. Visuellement, la courbe est-elle paramétrée par longueur d'arc ?
On pourra utiliser la commande plt.plot(X,Y,'o') qui trace le nuage de points (X[i],Y[i]).
3) Coder une fonction prenant en entrée c, N et un nombre $K(\ll N)$, qui trace la courbe $c([0,1])$, et trace sur la courbe des points $c(t_i)$ où

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_K = 1$$

sont choisis de tel sorte que les arcs $c([t_i, t_{i+1}])$ aient tous approximativement la même longueur. On pourra prendre $N = 1000$, $K = 20$.

Exercice 3 - Tracé d'une courbe à partir de sa courbure

Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par longueur d'arc, on rappelle les relations

$$\begin{cases} c'(t) = T(t) \\ T'(t) = \kappa(t) T(t)^\perp \end{cases}$$

où $\kappa_c(t)$ est la courbure de c en $c(t)$, et $T(t)^\perp$ est la rotation de $T(t)$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$. Supposons que $I = [0,1]$, et notons

$$t_i = \frac{i}{N}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$. Alors on a une approximation

$$\begin{cases} c(t_{i+1}) \approx c(t_i) + (t_{i+1} - t_i) T(t_i) \\ T(t_{i+1}) \approx T(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\kappa_c(t_i) T(t_i)^\perp \end{cases}$$

Utiliser cette approximation pour coder une fonction prenant en entrée

- Une fonction $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Un entier $N \in \mathbb{N}^*$.

et qui affiche un tracé approximatif de la courbe paramétrée par longueur d'arc $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\kappa_c = \kappa$ avec la condition initiale $c(0) = (0,0)$, $c'(0) = (1,0)$. On appliquera cela aux exemples suivants

$$\kappa(t) = 20, \sin(20t), 60\sin(20t), 60t$$