Travaux dirigés 2 - Polynômes

Exercice 1

On se donne les trois fonctions $1, X^2, X^4$, et E l'espace vectoriel engendré par ces trois fonctions.

1) Existe-t-il un élément f de E tel que $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$?
2) Même question avec $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

Exercice 2

Soit $(x_i)_{i=1,2,3} = (0, 1, 3)$, $(y_i)_{i=1,2,3} = (1, -1, 1)$.

1) Trouver l'ensemble des polynômes P de degré au plus 2 tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.
2) Trouver (sans calcul !) l'ensemble des polynômes P de degré au plus 3 tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.

Exercice 3

1) Montrer, en développant $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$, que $\cos(n\theta)$ peut être exprimé comme un polynôme de degré n en $\cos(\theta)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

2) Identifier le coefficient dominant de T_n, noté d_n.
3) Identifier les racines, minimum et maximum locaux de T_n dans $[-1, 1]$, et dessiner (grossièrement) les polynômes T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
4) Soit P un polynôme unitaire de degré n. Montrer que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \sup_{x\in[1,1]} \left|d_n^{-1} T_n(x)\right|.$$

5) Soit $a < b$, donner la valeur de

$$\inf_{P\in X^n+\mathbb{R}_{n-1}[X]} \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$$

en fonction de a, b, n. Pour quel polynôme P est-ce atteint ?

Exercice 4

On fixe une suite de points dans $\mathbb{R}$:

$$x_0 < x'_0 < x_1 < x'_1 < \ldots < x_n < x'_n.$$

1) Montrer que pour tout $(m_0, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout i :

$$\frac{P(x_i) + P(x'_i)}{2} = m_i$$

2) Est-ce toujours vrai si les $(x_i, x'_i)_i$ ne sont pas ordonnés de cette manière ?