

Travaux dirigés 1 - Courbes du plan

Exercice 1 - Calcul de longueur

Calculer la longueur des courbes paramétrées suivante.

- 1) Le cercle de rayon R : $c(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 2) La cycloïde $c(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. *Il s'agit de la trajectoire suivie par un point sur une roue qui roule sur l'axe des abscisses.*
- 3) La chaînette $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ \lambda(\cosh(t/\lambda) - \cosh(L/2\lambda)) \end{pmatrix}$ pour $-L/2 \leq t \leq L/2$ où $L, \lambda > 0$. *Il s'agit de la forme adoptée par un fil pesant de longueur au repos L , dont les extrémités sont attachées aux points $(-L/2, 0), (L/2, 0)$.*

Exercice 2 - Calcul de courbure

Calculer la courbure des courbes paramétrées suivante.

- 1) Le cercle de rayon R : $c(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$.
- 2) La cycloïde $c(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.
- 3) L'ellipse de demi-axes $a > b > 0$: $c(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}$. On simplifiera l'expression au maximum, en faisant apparaître l'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Exercice 3 - Variation de l'angle

Soit $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe lisse telle que $c'(t) \neq 0$ pour tout t . Il existe donc un angle $\theta(t)$ (supposé être une fonction lisse de t) tel que pour tout t :

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \|c'(t)\|$$

- 1) Sous l'hypothèse que c est paramétré par longueur d'arc, montrer que $\theta'(t) = \kappa_c(t)$, où κ_c est la courbure de c .
- 2) Généraliser cela au cas où c n'est pas paramétré par longueur d'arc.
- 3) Supposons de plus que c soit une courbe fermée $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que $c(a) = c(b)$ et $c'(a) = c'(b)$. Quelles sont les valeurs possibles de $\int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt$? Quelle est l'interprétation géométrique de cette valeur ?