Échantillonnage de Shannon

Convention La transformée de Fourier sera définie par

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixk}dx$$

Théorème. *Soit $K > 0$ on note $B_K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | Supp(\widehat{f}) \subset [-K, K]\}$. Alors on a la formule de reconstitution de f suivante :*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2K}\right) sinc(2\pi Kx - \pi n)$$

Où on a noté $sinc(x) = \frac{sin(x)}{x}$. La convergence se fait à la fois en norme L^2 et L^∞.

Démonstration. $i : \begin{cases} B_K \to L^2\left(\frac{\mathbb{R}}{2K\mathbb{Z}}\right) \\ f \mapsto \widehat{f}_{|[-K,K]} \end{cases}$ **est une isométrie bijective.** :
En effet, cette application est bien définie et injective par injectivité de la transformée de Fourier. C'est une isométrie car la transformée de Fourier est une isométrie. Elle est surjective car, pour tout $\varphi \in L^2\left(\frac{\mathbb{R}}{2K\mathbb{Z}}\right)$, si on note

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)1_{[-K,K]}(x),$$

on a $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ et $f := \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi})$ est un antécédent de φ.
L'existence de cette isométrie nous dit que B_K est un espace de Hilbert.

Dérivation de la formule de reconstitution :
Les $e_n(k) := \frac{1}{\sqrt{2K}} \exp\left(-\frac{\pi ikn}{K}\right)$ forment une base Hilbertienne de $L^2\left(\frac{\mathbb{R}}{2K\mathbb{Z}}\right)$. On peut calculer explicitement $s_n = i^{-1}(e_n)$, car $\tilde{e}_n$ est une fonction $L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-K}^{K} \frac{1}{\sqrt{2K}} \exp\left(-\frac{\pi ikn}{K} + 2\pi ixk\right) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2K}} [\frac{\exp\left(-\frac{\pi ikn}{K} + 2\pi ixk\right)}{i\pi\left(-\frac{n}{K} + 2x\right)}]_{-K}^{K} \\ &= \sqrt{2K}\mathrm{sinc}(2\pi Kx - \pi n) \end{aligned}$$

Les $(s_n)_n$ sont l'image d'une base Hilbertienne par une isométrie Hilbertienne bijective et forment donc une base Hilbertienne de B_K. Soit $f \in B_K$, son coefficient dans la direction s_n est :

$$\begin{aligned} (f, s_n) &= (i(f), e_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2K}} \int_{-K}^{K} \hat{f}(k) \exp\left(\frac{\pi ikn}{K}\right) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2K}} f\left(\frac{n}{2K}\right) \end{aligned}$$

D'où la formule de reconstitution :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2K}\right) \operatorname{sinc}(2\pi Kx - \pi n)$$

Vue comme une limite dans L^2. La convergence se fait en fait au sens de $\|\cdot\|_\infty$ car, pour tout $f \in B_K$,

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq \sqrt{2K}\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2K}\|f\|_2$$

$\square$

Remarques :
- B_K est en fait un espace de fonctions entières.
- Si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, c'est-à-dire de la forme $(1-\lambda)2K$, où λ est dans $]0, 2/3[$, alors la perte d'information ce traduit en un phénomène d'aliasing, c'est à dire un repliement du spectre des hautes fréquences sur les basses fréquences. En pratique, cela donne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{(1-\lambda)2K}\right) &= \int_{-K}^{K} \hat{f}(k) \exp\left(\frac{\pi i k n}{(1-\lambda)K}\right) dk \\ &= \int_{-(1-\lambda)K}^{(1-\lambda)K} [\hat{f}(k) + \hat{f}(k + 2(1-\lambda)K)) + \hat{f}(k - 2(1-\lambda)K))] \exp\left(\frac{\pi i k n}{(1-\lambda)K}\right) dk \end{aligned}$$

(On a séparé l'intégrale en 3 et utilisé des changements de variable)
Ainsi, si on note $g \in B_{(1-\lambda)K}$ telle que pour tout $|k| < (1-\lambda)K$,

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k) + \hat{f}(k + 2(1-\lambda)K)) + \hat{f}(k - 2(1-\lambda)K))$$

Alors la fonction restituée par échantillonnage de f est g. Dans le cas d'un signal réel dont le spectre est pair, cela revient à "replier" le spectre sur les bords (faire un dessin). Si la fréquence est inférieure à $\frac{2}{3}K$, il y a encore d'autres repliements.

Référence : Daubechies, Ten lectures on Wavelets