Une caractérisation des lois Gaussiennes

Théorème. *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles, vérifiant la condition que $X \coprod Y$ et $X + Y \coprod X - Y$. Alors X et Y suivent une loi normale.*

Démonstration. Soient $s, t \in \mathbb{R}$, on calcul $\varphi_{X+Y,X-Y}(s,t)$ de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y,X-Y}(s,t) &= \varphi_{X+Y}(s)\varphi_{X-Y}(t)\\ &= \varphi_X(s)\varphi_X(t)\varphi_Y(s)\varphi_Y(-t)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y,X-Y}(s,t) &= \varphi_{X,Y}(s+t, s-t)\\ &= \varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t)\end{aligned}$$

D'où la relation

$$\varphi_X(s+t)\varphi_Y(s-t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t)\varphi_Y(s)\bar{\varphi}_Y(t)$$

En considérant la même relation avec $s' = -s$, et en multipliant les deux (rappelons que $\varphi_X(u)\varphi_Y(u) = \varphi_{X+Y}(u)$), on obtient, en notant $\varphi = \varphi_{X+Y}$:

$$\varphi(s+t)\varphi(s-t) = \varphi(s)^2|\varphi(t)|^2$$

En prenant $s = t$, et en appliquant la valeur absolue, on obtient

$$|\varphi(2t)| = |\varphi(t)|^4$$

Comme φ est continue en 0 et y vaut 1, on en déduit que φ ne s'annule pas. On peut donc écrire $\varphi(t) = \exp(r(t) + i\theta(t))$ où r, θ sont des fonctions continues réelles qui vérifient :

$$\begin{aligned}r(s+t) + r(s-t) &= 2r(s) + 2r(t)\\ \theta(s+t) + \theta(s-t) &= 2\theta(s)\end{aligned}$$

Où $\theta(0) = 0$.

Lemme. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, on a $r(nt) = n^2 r(t)$, $\theta(nt) = n\theta(t)$.*

Démonstration. On d'abord cela pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence : c'est vrai pour $n = 0, 1$ et si c'est vrai aux rangs $n-1, n$, alors avec $(s,t) = (nt, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}r((n+1)t) &= 2r(nt) + 2r(t) - r((n-1)t)\\ &= (2n^2 + 2 - (n-1)^2)r(t)\\ &= (n+1)^2 r(t)\\ \theta((n+1)t) &= 2\theta(nt) - \theta((n-1)t)\\ &= (2n - (n-1))\theta(t)\\ &= (n+1)\theta(t)\end{aligned}$$

Comme $X+Y$ est une variable réelle, on a $\varphi(-t)=\bar{\varphi}(t)$, donc $r(-t)=r(t)$ et $\theta(-t)=-\theta(t)$, ce qui conclut. $\square$

Un corollaire direct est que pour tout rationnel a, on a $r(at)=a^2r(t)$ et $\theta(at)=a\theta(t)$. Par continuité de r,θ et densité des rationnels, c'est vrai pour tout $a\in\mathbb{R}$. On en déduit que $r(t)=t^2r(1)$ et $\theta(t)=t\theta(1)$.
Comme φ est bornée, on a $r(1)\leq 0$ donc il existe $\sigma\geq 0$ tel que $r(1)=-\frac{\sigma^2}{2}$. On note $m=\theta(1)$.
Alors $\varphi_{X+Y}(t)=\exp(imt-\frac{\sigma^2}{2}t^2)$; $X+Y$ est gaussienne. De même, $X-Y$ est gaussienne. $(X+Y,X-Y)$ sont indépendantes, donc $(X+Y,X-Y)$ est Gaussienne, et X et Y sont donc Gaussiennes. Notons qu'elle ne suivent pas forcément la même loi ; pour tout X,Y Gaussiennes indépendantes, (X,Y) est une variable Gaussienne, donc $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

$\square$