Transformée de Plancherel, transformée de Fourier inverse

Convention La transformée de Fourier sera définie par

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixk}dx$$

On note $g(x) = \exp(-\pi x^2)$ et $g_a(x) = \frac{1}{a}g\left(\frac{x}{a}\right)$.

Lemme. *$\widehat{g} = g$ et $(g_a)_{a\to 0}$ est une approximation de l'unité.*

Démonstration. Oui ! □

Théorème. *1/ Soit $f \in L^1$ tel que $\widehat{f} \in L^1$, alors $f(x) \underset{p.p.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$.*

2/ $\begin{cases} L^1 \cap L^2 \to \mathcal{C}_b^0 \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases}$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

Démonstration. 1/Soit $f \in L^1$ tel que $\widehat{f} \in L^1$, $\tilde{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$ est une fonction continue bornée ; on montre qu'elle est égale à f. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}g(a\xi)d\xi && \text{(convergence dominée)} \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{2\pi i(x-y)\xi}g(a\xi)dyd\xi && \text{(définition de } \widehat{f}\text{)} \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\frac{x-y}{a}\zeta}g(\zeta)d\xi dy && \text{(Fubini+changement de variable)} \\
&= \lim_{a\to 0} f * g_a(x) && \text{(utilisation du lemme)}
\end{aligned}$$

g_a est une approximation de l'unité, donc $f * g_a \underset{L^1}{\to} f$. On a donc convergence presque partout après extraction. On en déduit que f est presque partout égal à $\tilde{f}$, qui est une fonction continue bornée (qui est donc l'unique représentant continue de f).

2/ Notons déjà que si $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on vérifie que $\widehat{f} \in L^1$. En effet, $\widehat{f''} \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{f''}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\widehat{f}(\xi)$, donc $|\widehat{f}(\xi)| \leq \min(\|f\|_1, \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\|f''\|_1) \in L^1$. Montrons que $\widehat{\cdot}$ réalise une isométrie $(\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_2) \to L^2$.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\bar{\widehat{f}}(\xi)d\xi && \text{(Bien défini car positif)}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\bar{f}(x)dxd\xi\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi dx && \text{(Fubini)}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)f(x)dx && \text{(Formule précédente)}\\
&= \|f\|_2
\end{aligned}$$

On a donc construit une isométrie (pour les normes $\|.\|_2$) de $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Cette isométrie est 1-lipschitzienne ; en particulier, elle est uniformément continue. $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans L^2, donc il existe un unique prolongement de cette isométrie à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, d'où le résultat (on note $\mathcal{F}$ ce prolongement).

Notons que $\mathcal{F}$ et $\widehat{\cdot}$ coïncident sur $L^1 \cap L^2$; en effet, soit $f \in L^1 \cap L^2$, $f * g_{1/n}$ converge vers f dans L^1 **et** L^2 et est $\mathcal{C}^2$. Si on note χ une fonction $\mathcal{C}^2$ à support compact qui vaut 1 au voisinage de 1, alors $f_n := \chi(n\cdot)f * g_{1/n}$ est dans $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et converge vers f dans L^1 et L^2. En effet, soit $p \in \{1,2\}$, on a :

$$\|f - f_n\|_p \leq \|(f - f * g_{1/n})\chi(n\cdot)\|_p + \|(1-\chi(n\cdot))f\|_p$$

Le premier terme tend vers 0 car $f * g_{1/n} \to f$ dans L^p et le second terme tend bien vers 0 par convergence dominée.

Pour tout n, $\mathcal{F}(f_n) = \widehat{f_n}$. $\mathcal{F}(f_n)$ converge vers $\mathcal{F}(f)$ dans L^2, donc presque partout après extraction. Or, $\widehat{f_n}$ converge simplement vers $\widehat{f}$, d'où l'égalité $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ presque partout.

Remarque. *Si $f \in L^2$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi x\xi}dx$ n'as pas de sens, mais on a par contre une convergence de $\xi \mapsto \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2\pi x\xi}dx$ vers $\mathcal{F}(f)$ dans L^2 (donc presque partout quitte à extraire). En effet, $1_{[-A,A]}f$ converge dans L^2 vers f. En fait la convergence presque partout est vraie même sans extraction : c'est le théorème de Carleson.*

$\square$