Théorème de la base de Burnside

Définition. Soit p un nombre premier, G un p-groupe, on note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ses sous-groupes stricts maximaux, $\mathcal{Z}$ son centre, D sous groupe dérivé, et $F = \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H$ le sous groupe des éléments **mous**.

Lemme. *Les sous-groupes maximaux H de G sont distingués et $G/H \cong \mathbb{F}_p$.*

Démonstration. On le montre par récurrence sur $|G|$: si $|G| = p$, ça marche. Supposons maintenant $|G| > p$.
On rappelle que le centre de G est non trivial. Soit H un sous groupe maximal, il y a deux cas :
- Si $H \cap \mathcal{Z} \neq \{0\}$, alors on applique l'hypothèse de récurrence à $\frac{H}{H \cap \mathcal{Z}}$ qui est un sous-groupe maximal de $\frac{G}{H \cap \mathcal{Z}}$. Il est donc distingué, donc H est distingué dans G et $\frac{G}{H} \cong \frac{G/(H\cap\mathcal{Z})}{H/(H\cap\mathcal{Z})} \cong \mathbb{F}_p$.
- Sinon, il existe $x \in \mathcal{Z}$ d'ordre p (car $\mathcal{Z}$ est un p-groupe non trivial), et $\{x\} \cup H$ engendre G par maximalité de H. Il y a alors un isomorphisme naturel entre G/H et $\langle x \rangle$, donné par $x^k \mapsto x^k H$, ce qui conclut. □

Remarque. *Un corollaire de ce résultat est que les G/H sont abéliens de torsion p, donc le groupe dérivé de G est dans tous les sous-groupes maximaux, donc dans F, et G/F est donc abélien de torsion p.*

Théorème. *Soit G un p-groupe, toute les parties génératrices minimales de G ont même cardinal.*

Démonstration. On munie G/F d'une structure d'espace vectoriel par :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_p \times G/F \to G/F \\ (k, x) \mapsto x^k \end{cases}$$

Cela fonctionne car G/F est abélien de torsion p. Si $B \subset G/F$, alors $\langle B \rangle = \{b_1^{n_1} b_2^{n_2} .. b_k^{n_k}, b_i \in B, n_i \in \mathbb{F}_p\} = Vect(B)$. Ainsi, B est une partie génératrice (resp minimale) si et seulement si elle l'est au sens des vecteurs (resp libre).

Soit $d = dim(G/F)$, $\bar{x_1}, .., \bar{x_d}$ une base de G/F. Alors $\langle x_1, ..x_d \rangle = G$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe H un sous-groupe maximal tel que $\langle x_1, .., x_d \rangle \subset H$ et alors, pour tout $y \in G \setminus H$, $\bar{y}$ n'est pas dans $\langle \bar{x_1}, .., \bar{x_d} \rangle$. Réciproquement, si $y_1, .., y_k$ est une famille génératrice de G, alors $\bar{y_1}, .., \bar{y_k}$ est une famille génératrice de G/F, donc $k \geq d$, ce qui achève la preuve. □

Remarque. *Ce n'est plus vrai si on est pas dans un p-groupe, le résultat est faux. Exemple :*
Soit $n \geq 4$, S_n est engendré de manière minimale par $\{(1,2), (2,3), (3,4), .., (n-1, n)\}$ *et* $\{(1,2,3,4,..,n), (1,2)\}$.

Référence : Zavidovique