Théorème de l'application ouverte

Théorème. *Soient E, F des espaces de Banach, $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective. Alors T est ouverte.*

Démonstration. On note B la boule unité fermée. Les $(\overline{T(nB)})_{n\geq 1}$. forment un recouvrement fermé de F par surjectivité de T.
F est un espace de Banach, donc selon le théorème de Baire, il existe $n \geq 1$ tel que $\overline{T(nB)}$ est d'intérieur non vide. $\overline{T(B)}$ est donc d'intérieur non vide et contient une boule de centre $x_0 \in F$.
Donc $\overline{T((1+\|x_0\|)B)}$ contient une boule centrée en 0, donc $\overline{T(B)}$ aussi ; il existe $r > 0$ tel que $rB \subset \overline{T(B)}$.
Soit $y \in \frac{r}{2}B$. On construit la suite x_n de la manière suivante : $y \in \frac{r}{2}B \subset \overline{T(\frac{1}{2}B)}$, donc il existe $x_1 \in \frac{1}{2}B$ tel que $\|x_1 - y\| \leq \frac{r}{4}$.
On construit de même $x_2 \in \frac{1}{4}B$ tel que $\|x_1 + x_2 - y\| \leq \frac{r}{8}$. De manière générale, on a construit $(x_1, .., x_k)$ tels que pour tout $1 \leq l \leq k$, on a :

$$x_l \in \frac{1}{2^l}B$$
$$\|x_1 + .. + x_l - y\| \leq \frac{r}{2^{l+1}}$$

Alors, $x_1 + .. + x_k - y \in \frac{r}{2^{k+1}}B \subset \overline{T(\frac{1}{2^{k+1}}B)}$, donc il existe $x_{k+1} \in \frac{1}{2^{k+1}}B$ tel que $\|x_1 + .. + x_{k+1} - y\| \leq \frac{r}{2^{k+2}}$.
$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 1$, et E est un espace de Banach, donc la série des $(x_k)_k$ converge vers $x \in B$, et $T(x) = y$. Donc $\frac{r}{2}B \subset T(B)$, et T est ouverte. □

Dans la suite, E et F sont toujours des espaces de Banach.

Corollaire. *Soit $T : E \to F$ une application linéaire, c'est une application continue si et seulement si $\{(x, Tx), x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$.*

Corollaire. *Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors sa réciproque est continue.*

Corollaire. *Il n'existe pas de suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que pour toute suite v_n,*

$$(v \text{ est sommable }) \Leftrightarrow (v = \mathcal{O}(u))$$

Corollaire. *Soit X un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, \infty]$, f mesurable sur X telle que pour tout $g \in L^{p'}(X)$, on a $fg \in L^1(X)$. Alors $f \in L^p(X)$.*