Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème. *Soit K un espace compact (métrique ?), A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ qui sépare les points ($\forall x \neq y \in K, \exists f \in A | f(x) \neq f(y)$). Alors A est dense.*

Démonstration. Quitte à considérer l'adhérence de A, on suppose que A est fermée, et il faut alors montrer que $A = \mathcal{C}(K)$.

Lemme. *A est stable par $f \mapsto |f|$.*

En effet, soit $f \in A$, et $\varepsilon > 0$. L'image de X par f est inclus dans un segment de $\mathbb{R}$ par compacité de X. Selon le théorème de Weierstrass polynomiale, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $y \in f(X)$, $||y| - P(y)| \leq \varepsilon$.
Alors $\|P(f) - |f|\| \leq \varepsilon$; $|f|$ est adhérent à A, et est donc dans A.

Corollaire. *A est stable par maximum (noté $\vee$) et minimum (noté $\wedge$).*

En effet, soit $f, g \in A$, $|f - g|$ est dans A, donc $f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in A$ et $f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in A$.

On peut donc attaquer la preuve ; soit $f \in \mathcal{C}(X)$ et $\varepsilon > 0$, on commence par l'approcher par en dessous, puis par au dessus. On fixe $x \in X$. Soit $y \in X$. Si $y \neq x$, comme A sépare les points, il existe $f_{x,y} \in A$ telle que $f_{x,y}(x) = f(x)$ et $f_{x,y}(y) = f(y)$. Si $y = x$, on pose $f_{x,x}(z) = f(x)$ pour tout $z \in X$.
Pour tout $y \in X$, $f_{x,y}(y) = f(y)$, donc il existe U_y un voisinage ouvert de y tel que $f_{x,y} < f + \varepsilon$ sur U_y.
Les $(U_{x,y})_{y \in X}$ forment un recouvrement ouvert de X ; il existe $y_1, .., y_k$ tel que les $(U_{y_i})_{i=1..k}$ recouvrent X.
Soit $f_x = \bigwedge_{i)1..k} f_{x,y_i} \in A$, pour tout $z \in X$, il existe i tel que $z \in U_{y_i}$, donc $f_x(z) \leq f(z) + \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \in X$, on a construit une fonction $f_x \in A$ telle que $f_x < f + \varepsilon$ et $f_x(x) = f(x)$.
Il existe V_x un voisinage ouvert de x tel que $f_x > f - \varepsilon$ sur V_x. Les V_x forment un recouvrement ouvert de X et comme précédemment, en en prenant un sous-recouvrement fini, en prenant le maximum des fonctions associées, on obtient $g \in A$ tel que $\|g - f\| < \varepsilon$, d'où le résultat. □

Corollaire. *Soit L un réseau de rang maximal dans $\mathbb{R}^n$, $T = \mathbb{R}^n / L$. Alors l'espace engendré par les e_λ : $\begin{cases} T \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(2\pi i \lambda \cdot x) \end{cases}$ est dense pour $\|.\|_\infty$ et pour $\|.\|_2$.*

Cela permet de faire des séries de Fourier en dimension supérieure.

Corollaire. *Soient X, Y deux compacts, $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y)$.*

Cela permet de définir la convolution de distribution.

Corollaire. *Soit X un compact métrique, $\mathcal{C}(X)$ est séparable.*

Démonstration. X est précompact, donc séparable ; il suffit de considérer ne suite de rayon $r_n \to 0$ et une suite de recouvrements de boules de rayons r_n pour chaque point. On dispose donc d'une suite dense $(x_n)_n$. Pour tout $n < m$, on note

$$f_{n,m}(x) = \frac{d(x, x_n)}{d(x, x_m) + d(x, x_n)}$$

; $f_{n,m}(x_n) = 0$ et $f_{n,m}(x_m) = 1$
$\mathbb{Q}[(f_{n,m})_{n,m}]$ est une partie dénombrable dense dans l'algèbre $\mathbb{R}[(f_{n,m})_{n,m}]$, qui est dense dans $\mathcal{C}(X)$ grâce au théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

Ce résultat a son importance pour des raisons de topologie faible.

Corollaire. *X compact, les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X)$ sont les $m_x = \{f | f(x) = 0\}$, pour $x \in X$.*