Théorème de Steinhaus

Théorème. *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence exactement* 1 *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables indépendantes à loi uniforme dans* $\mathbb{U}$*. Alors presque sûrement, tous les points de* $\partial\mathbb{D}$ *sont singuliers.*

Lemme. *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence exactement* 1*, alors elle admet un point singulier sur* $\partial\mathbb{D}$*.*

Démonstration. Notons $f(z) = \sum a_n z^n$ dans $\mathbb{D}$. Supposons que pour tout $\xi \in \partial\mathbb{U}$, il existe un disque $\mathbb{D}(\xi, r_\xi)$ un disque ouvert tel que f se prolonge à $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\xi, r_\xi)$. Par compacité de $\partial\mathbb{D}$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\xi \in \partial\mathbb{D}$, f se prolonge de manière holomorphe à $\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\xi, r)$ en une fonction f_ξ.
Soit alors $\zeta, \xi \in \partial\mathbb{D}$. Soit $z \in (\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\xi, r)) \cap (\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\xi, r))$. Si $z \in \mathbb{D}$, alors $f_\zeta(z) = f(z) = f_\xi(z)$. Sinon, alors $|\xi - \zeta| < 2r$, donc $\mathbb{D}(\xi, r) \cap \mathbb{D}(\zeta, r)$ est un convexe (donc connexe) non-vide qui intersecte $\mathbb{D}$ en $\frac{\zeta+\xi}{2}$, et selon le principe des zéros isolés appliqué à f_ζ et f_ξ sur $\mathbb{D} \cup (\mathbb{D}(\zeta, r) \cap \mathbb{D}(\zeta, r))$, on a bien $f_\xi(z) = f_\zeta(z)$. Ainsi, on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(1 + r)$, ce qui est absurde car on suppose que le rayon de convergence de la série est 1. □

Démonstration. On note $f_\omega(z) = \sum u_n(\omega) a_n z^n$. On défini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*,\ \xi \in \mathbb{U}$, les événements suivant :

$$E_{k,\xi} = \left(\limsup_{n\to\infty} |\frac{f_\omega^{(n)}((1 - \frac{1}{k})\xi)}{n!}|^{1/n} < \frac{k}{2} \right)$$
$$E_\xi = \bigcup_{k\geq 1} E_{k,\xi}$$

$E_{k,\xi}$ est équivalent à f_ω se prolonge à $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}((1 - \frac{1}{k})\xi, \frac{2}{k})$. Ainsi, E_ξ est équivalent à "ξ n'est pas singulier".
Notons deux choses :
- Comme $(u_n)_n$ et $(u_n \xi^n)_n$ sont de même loi, $\mathbb{P}(E_{k,\xi})$ et $\mathbb{P}(E_\xi)$ ne dépendent pas de ξ.
- Ce sont des évènements asymptotique pour la suite $(u_n)_n$.

Selon la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a $\mathbb{P}(E_\xi) \in \{0, 1\}$ et de même pour $\mathbb{P}(E_{k,\xi})$. Si $\mathbb{P}(E_\xi) = 1$ pour un certain ξ (et donc pour tout ξ), alors comme $(E_{k,\xi})_k$ est croissante, on a

$$\lim \mathbb{P}(E_{k,\xi}) = \mathbb{P}(E)$$

Donc il existe k tel que $\mathbb{P}(E_{k,\xi}) = 1$, et ce pour tout ξ. Ainsi, pour tout ξ, f se prolonge presque sûrement sur un disque de rayon $\frac{1}{k}$ de centre ξ. Il suffit alors de considérer une partie dense dénombrable de $\mathbb{U}$ pour voir que f n'admet presque sûrement aucun point singulier, ce qui est absurde selon le lemme. Donc pour tout ξ, $\mathbb{P}(E_\xi) = 0$, ce qui conclut □