Théorème de Riesz-Thorin

Lemme. *Soit F une fonction holomorphe sur $B = \{z \in \mathbb{C} | 0 < Re(z) < 1\}$, continue au bord, et bornée. On note $M_r(F) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}} |F(r + i\eta)|$. Alors pour tout $r \in]0, 1[$,*

$$M_r(F) \leq M_0(F)^{1-r} M_1(F)^r$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et $F_\varepsilon(z) = (1 + z)^{-\varepsilon} F(z) \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^z$. F_ε est bornée sur B, et bornée par M_0 au bord. $F_\varepsilon(r+i\eta) \underset{|\eta|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par application du principe du maximum sur $\{z \in \mathbb{C} | 0 < Re(z) < 1, |Im(z)| \leq M\}$ pour M arbitrairement grand, on en déduit que F_ε (et donc $F(z) \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^z$ en faisant tendre ε vers 0) est borné par M_0, d'où

$$|F(r + i\eta)| \leq \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{-r} M_0 = M_0^{1-r} M_1^r$$

□

Théorème. *Soient $p_0, p_1, q_0 \neq q_1 \in [1, \infty]$, X et Y des espaces mesurés, et*

$$T : L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X) \to L^{q_0}(Y) \cap L^{q_1}(Y)$$

Une application linéaire telle que pour tout $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$,

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$$
$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$$

Soit $\theta \in]0, 1[$, on note $\frac{1}{p(\theta)} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q(\theta)} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Alors pour tout $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$, on a

$$\|Tf\|_{q(\theta)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p(\theta)}$$

Remarque. *On rappelle l'inégalité d'interpolation $\|f\|_{p(\theta)} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}$, qui découle de l'inégalité de Hölder.*
On notera, pour tout p, p' l'exposant conjugué tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Ainsi défini, $\frac{1}{p(\theta)}$, $\frac{1}{q(\theta)}$, mais aussi $\frac{1}{q(\theta)'}$ sont des fonctions affines en θ.
Pour le cas $q_0 = q_1 = \infty$, il faut ajouter une hypothèse sur l'espace Y (par exemple, être σ-fini).

Démonstration. On fixe $\theta \in]0, 1[$ et $(p, q) = (p(\theta), q(\theta))$. On rappelle la définition duale de la norme d'opérateur :

$$\|T\|_{L^p(X)\to L^q(Y)} = \sup_{\|f\|_p=1,\ \|g\|_{q'}=1} \langle Tf, g\rangle$$

Où q' est l'exposant conjugué à q. De plus, la borne supérieure peut être prise sur un ensemble dense de $L^p(X)$ (resp $L^q(Y)$) ; on va prendre des fonctions simples. On fixe f et g de telles fonction simples, que l'on écrit $f = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^l b_j 1_{B_j}$ où les A_i, B_j sont de mesure fini et disjoints deux à deux.
Pour tout $z \in B$, on pose

$$f_z(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(x)}{|f(x)|} 1_{f(x)\neq 0} = \sum_{i=1}^k |a_i|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{a_i}{|a_i|} 1_{A_i}(x)$$
$$g_z(y) = |g(y)|^{\frac{q'}{q(z)'}} \frac{g(y)}{|g(y)|} 1_{g(y)\neq 0} = \sum_{j=1}^l |b_j|^{\frac{q'}{q(z)'}} \frac{b_j}{|b_j|} 1_{B_j}(y)$$

Notons en particulier que $f_\theta = f$, $g_\theta = g$, et pour $j \in \{0,1\}$ et $\eta \in \mathbb{R}$, $\|f_{j+i\eta}\|_{p_j} = \|f\|_p^{p/p_j} = 1$, et de même $\|g_{j+i\eta}\|_{q_j'} = 1$.
On pose

$$F(z) = \langle Tf_z, g_z \rangle = \sum_{i,j} |a_i|^{\frac{p}{p(z)}} |b_j|^{\frac{q'}{q(z)'}} \langle T1_{A_i}, 1_{B_j} \rangle \in \mathcal{O}(B)$$

F vérifie les hypothèses du lemme ; en effet F est holomorphe bornée (rappelons que $\frac{1}{p(z)}$ et $\frac{1}{q(z)'}$ sont des fonctions affines, de partie réelle bornée sur B). De plus, grâce aux observations ci-dessus en $j + i\eta$ pour $j = 0, 1$, si on reprend les notations du lemme, on a l'inégalité $M_j(F) \leq \|T\|_{L^{p_j}(X) \to L^{q_j}(Y)} =: M_j$.
Ainsi, en utilisant le lemme en θ, on obtient $\langle Tf, g \rangle \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, et ce pour tout f, g, d'où $\|T\|_{L^p(X) \to L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

$\square$

Application : La transformée de Fourier restreinte à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est bien définie et vérifie $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \to L^\infty} = \|\mathcal{F}\|_{L^2 \to L^2} = 1$. On applique le théorème de Riez-Thorin avec $(p_0, q_0, p_1, q_1) = (1, \infty, 2, 2)$. Ainsi, pour tout $p \in [1, 2]$, on a $\|\mathcal{F}\|_{L^p \to L^{p'}} \leq 1$; cela constitue l'inégalité de Hausdorff-Young.
Une autre application (qui peut se faire sans le théorème de Riesz-Thorin) est l'inégalité de Young avec la convolution. On considère $g \in L^q(\mathbb{R})$, la convolution par g est de type (q', ∞) et $(1, q)$ (de norme 1) et on trouve que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, on a $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.