Théorème de Rellich

Théorème. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. On note $\mathcal{B}$ la boule unité de $H_0^1(\Omega)$ intersectée avec $\mathcal{D}(\Omega)$, et on pose ρ une fonction C^1, positive, à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$, d'intégrale 1. On note, pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, qui vérifie les mêmes propriétés que ρ et est à support dans la boule centrée de rayon ε.
Soit $\mathcal{B}_\varepsilon = \{f * \rho_\varepsilon,\ f \in \mathcal{B}\}$. On décompose le raisonnement en deux étapes :
1/ On montre que les $\mathcal{B}_\varepsilon$ sont relativement compacts par le théorème d'Ascoli.
2/ On montre que les $\mathcal{B}_\varepsilon$ approchent suffisamment $\mathcal{B}$ pour conclure la précompacité (et donc la compacité) de $\mathcal{B}$.

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, la compacité relative de $\mathcal{B}$ dans $L^2(\Omega)$ entraîne celle de la boule unité de $H_0^1(\Omega)$.
1/ Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $\mathcal{B}_\varepsilon$ est un ensemble de fonctions continues (car les éléments de $\mathcal{B}$ et ρ_ε sont continues à support compact) à support sur un ε-voisinage de Ω, qui est donc borné (on fixe une fois pour toute K un 1-voisinage compact de Ω, tel que toutes les fonctions considérées sont à support dans K). Soit $f \in \mathcal{B}$, on a :

$$\|f * \rho_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|f\|_2 \|\rho_\varepsilon\|_2 \leq \|\rho_\varepsilon\|_2$$

Et pour tout $x, y \in K$, selon l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} |f * \rho_\varepsilon(y) - f * \rho_\varepsilon(x)| &\leq |y-x| \|\nabla(f * \rho_\varepsilon)\|_{\infty,K} \\ &\leq |y-x| \|\nabla f\|_2 \|\rho_\varepsilon\|_2 \\ &\leq |y-x| \|\rho_\varepsilon\|_2 \end{aligned}$$

Cela montre que $\mathcal{B}_\varepsilon$ est une famille de fonctions définies sur un compacte K, bornées par $\|\rho_\varepsilon\|_2$, $\|\rho_\varepsilon\|_2$-équilipschitziennes : selon le théorème d'Ascoli, $\mathcal{B}_\varepsilon$ est relativement compact pour la norme $\|.\|_{\infty,K}$, donc pour la norme $\|.\|_2$ (qui la domine car K est de mesure finie).

2/ Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $f \in \mathcal{B}$, montrons l'inégalité :

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_2 \leq \varepsilon \|\widehat{\rho}\|_\infty$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_2 &= \|(\widehat{f * \rho_\varepsilon - f})\|_2 \\ &= \|\widehat{f}\{1 - \widehat{\rho_\varepsilon}\}\|_2 \\ &= \|\widehat{f}\{1 - \widehat{\rho}(\varepsilon \cdot)\}\|_2 \end{aligned}$$

Selon l'inégalité des accroissements finis, on a $|1-\widehat{\rho}(\varepsilon\xi))| \leq \varepsilon|\xi|\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty$, ce qui permet de poursuivre la majoration :

$$\begin{aligned}\|f*\rho_\varepsilon - f\|_2 &\leq \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty\|\xi\widehat{f}\|_2\\ &= \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty\|\widehat{\nabla f}\|_2\\ &= \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty\|\nabla f\|_2\\ &\leq \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty\end{aligned}$$

Soit alors $r>0$, et $\varepsilon < r/\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty$. $\mathcal{B}_\epsilon$ est relativement compact pour $\|\cdot\|_2$, donc relativement compact donc il existe $f_1*\rho_\varepsilon, .., f_k*\rho_\varepsilon$ dans $\mathcal{B}_\epsilon$ tels que les $B(f_i, r)$ recouvrent $\mathcal{B}_\epsilon$. Soit alors $f\in\mathcal{B}$, il existe un $i\in 1..k$ tel que :

$$\begin{aligned}\|f-f_i\|_2 &\leq \|f-f*\rho_\varepsilon\|_2 + |f*\rho_\varepsilon - f_i*\rho_\varepsilon\|_2 + \|f_i*\rho_\varepsilon - f_i\|_2\\ &\leq \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty + r + \varepsilon\|\nabla\widehat{\rho}\|_\infty\\ &\leq 3r\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ est donc précompact, donc relativement compact (par complétude de $L^2(\Omega)$, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire. *(Modes propres du Laplacien) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe λ_i des réels tels que $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq .. \to\infty$, et $(\phi_i)_{i\geq 1}$ une base Hilbertiennes de $L^2(\Omega)$ tels que pour tout $i\geq 1$, on a $\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ou au sens variationnel dans $H^1_0(\Omega)$).*

Démonstration. (Esquisse..)
Soit $f\in Ł^2(\Omega)$, on formule le problème $-\Delta u = f$ de manière variationnelle dans $H^1_0(\Omega)$; $u\in H^1_0(\Omega)$ est solution si et seulement si

$$\forall v\in H^1_0(\Omega),\quad \langle\nabla u, \nabla v\rangle = \langle f, u\rangle$$

Le théorème de Lax-Milgram nous donne l'existence et l'unicité d'un tel u, noté "$(-\Delta)^{-1}f$". L'évaluation de la formulation variationnelle en $v=u$ donne la continuité de l'application $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega)\to H^1_0(\Omega)$. Selon le théorème de Rellich, l'application induite $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ est donc compact. On vérifie que celle-ci est positive, autoadjointe : il existe donc une base Hilbertienne propre pour $(-\Delta)^{-1}$ notée $(\phi_i)_i$, associée à des valeurs propres décroissantes notée $\frac{1}{\lambda_i}$ qui tendent vers 0. □

Remarque. *Les ϕ_i sont en fait $\mathcal{C}^\infty$ et on a $\Delta\phi_i = -\lambda_i\phi_i$ au sens usuel. Aussi, pour être sûr que ϕ_i est régulier et s'annule au bord, on a besoin d'une condition de régularité sur Ω.*
Le théorème de Rellich est toujours vrai pour $H^1(\Omega)$ à condition que Ω soit à bord $\mathcal{C}^1$. Dans la preuve, cela se retrouve dans l'argument de densité des fonctions test dans $H^1(\Omega)$: on a rapidement besoin d'un prolongement continue $H^1(\Omega)\to H^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui nécessite en gros des bords $\mathcal{C}^1$.