Théorème de Peano

Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Soit $x_0 \in \Omega$, il existe I un intervalle ouvert à droite en 0 et une fonction $x \in \mathbb{C}^1(I, \Omega)$ telle que $x(0) = x_0$ et pour tout $t \in I$, $x'(t) = V(x(t))$.*

Démonstration. Quitte à translater et à dilater les longueurs, on suppose $x_0 = 0$, $B \in \Omega$ où B est la boule unité fermée. Soit $T = \min(1, \|V\|^{-1}_{\infty,[0,1]\times B})$
Pour tout $N \geq 1$, on définit $(x_k^N)_{0\leq k\leq N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1}^N = x_k^N + \frac{T}{N} V(\frac{kT}{N}, x_k^N) \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate sur k à N fixé, on a pour tout $0 \leq k \leq N$, $\|x_k^N\| \leq \frac{k}{N}$.
On définit la fonction $x^N \in \mathcal{C}^0([0,T], B)$ par morceau ; si $\frac{k}{N} \leq t \frac{k+1}{N}$:

$$x^N(t) = (k+1-Nt)x_k^N + (Nt-k)x_{k+1}^N$$

On montre que $(x^N)_N$ vérifie le théorème d'Ascoli : celles-ci sont définies sur un compact, à valeur dans le compact B. x^N est affine par morceaux et sa constante de Lipschitz est

$$\max_{k=0..N-1} \left(\frac{\|x_{k+1}^N - x_k^N\|}{T/N} \right) = \max_{k=0..N-1} \left(\|V(\frac{Tk}{N}, x_k^N)\| \right) \leq 1/T$$

Ainsi, les $(x^N)_N$ sont équilipschitziennes, donc équicontinues, et on peut appliquer le théorème d'Ascoli : il existe $x \in \mathcal{C}^0([0,T], B)$ telle que $\|x - x^N\|_\infty \to 0$.
Considérons la fonction $y^N \in \mathcal{C}^1([0,T], B)$ définie par :

$$y^N(t) = \int_0^t V(s, x^N(s))ds$$

Pour tout N, $y^N(0) = 0$ et sa dérivée converge uniformément (par continuité uniforme de V) vers $t \mapsto V(t, x(t))$. Donc $(y^N)_N$ converge uniformément vers une fonction $y \in \mathcal{C}^1([0,T], B)$ telle que $y'(t) = V(t, x(t))$. Il suffit de vérifier que $x = y$.
Or, pour tout $t \in [0,T]$, soit $\varepsilon > 0$, $N > 0$ tel que $\frac{T}{N}$ est inférieur au ε-module de continuité de la fonction $V_{|[0,T]\times B}$. On rappelle que les x^N sont 1-Lipschitziennes. Ainsi :

$$\begin{aligned} \|x^N(t) - y^N(t)\| &= \| \int_0^t V(s, x^N(s))ds - x^N(t)\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{k}{N}T}^{\frac{k+1}{N}T} \|V(s, x^N(s)) - V(\frac{k}{N}T, x_k^N)\|ds \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$