

Théorème de Lindeberg

Théorème. Soit $(r_n)_n$ une suite d'entiers et $(X_{n,k})_{1 \leq k \leq r_n}$ des variables aléatoires centrées indépendantes selon i . On note $\sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}[X_{n,k}^2]$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2$, $S_n = \sum_{k=1}^{r_n} X_{n,k}$. On suppose de plus que les $(X_{k,n})$ vérifient la condition de Lindeberg :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}| > \varepsilon s_n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors $\frac{S_n}{s_n}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Démonstration. Quitte à renormaliser les $X_{n,k}$ par s_n , on suppose que $s_n = 1$. On note $\phi_{n,k}$ la fonction caractéristique de $X_{n,k}$, et ϕ_n celle de S_n . Grâce au théorème de Lévy, il suffit de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_n(t) \rightarrow \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Deux lemmes utiles par la suite :

Soient a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n des nombres complexes du disque unités on peut montrer par récurrence que

$$|a_1 a_2 \dots a_n - b_1 b_2 \dots b_n| \leq |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|$$

On utilisera aussi le fait que $\sup(\sigma_{n,k}, 1 \leq k \leq r_n) \rightarrow 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}| > \varepsilon}] \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$, k , on a

$$\mathbb{E}[X_{n,k}^2] = \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}| \leq \varepsilon}] + \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}| > \varepsilon}] \leq \varepsilon^2 + \varepsilon$$

On fixe un $t \in \mathbb{R}$ dans la suite, et on écrit :

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \exp(-\frac{t^2}{2})| &= \left| \prod_{k=1}^{r_n} \phi_{n,k}(t) - \prod_{k=1}^{r_n} \exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{r_n} |\phi_{n,k}(t) - \exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \\ &= A + B \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{r_n} \left| \phi_{n,k}(t) - \left(1 - \frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}\right) \right| \\ B &= \sum_{k=1}^{r_n} \left| \exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}) - \left(1 - \frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

Majoration de A :

Un développement de Taylor donne que

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$\text{et } e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}_{x \rightarrow \infty}(x^2)$$

Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)| \leq C \min(|x|^2, |x|^3)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |\phi_{n,k}(t) - (1 - \frac{1}{2}\sigma_{n,k}^2)| &\leq \mathbb{E}[|e^{itX_{n,k}} - (1 + itX_{n,k} - \frac{1}{2}t^2X_{n,k}^2)|] \\ &\leq C \mathbb{E}[\min(|tX_{n,k}|^2, |tX_{n,k}|^3)] \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{k=1}^{r_n} |\phi_{n,k}(t) - (1 - \frac{1}{2}\sigma_{n,k}^2)| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[\min(|tX_{n,k}|^2, |tX_{n,k}|^3)] \\ &\leq C \sum_{k=1}^{r_n} \varepsilon \mathbb{E}[|tX_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}| \leq \varepsilon}] + \mathbb{E}[|tX_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}| > \varepsilon}] \\ &\leq Ct^2 \varepsilon + Ct^2 \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[|X_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}| > \varepsilon}] \end{aligned}$$

On retrouve la condition de Lindeberg dans le second terme.

Majoration de B :

Le développement de l'exponentielle en série entière donne que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z) - (1 + z)| \leq |z|^2 \exp(|z|)$. D'où

$$|\exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}) - (1 - \frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \leq \sigma_{n,k}^2 \times \left(\frac{t^4}{4} \sup(\sigma_{n,k}^2, 1 \leq k \leq r_n) \exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1 \leq k \leq r_n)) \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} B &\leq \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2 \times \left(\frac{t^4}{4} \sup(\sigma_{n,k}^2, 1 \leq k \leq r_n) \exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1 \leq k \leq r_n)) \right) \\ &\leq \left(\frac{t^4}{4} \sup(\sigma_{n,k}^2, 1 \leq k \leq r_n) \exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1 \leq k \leq r_n)) \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Référence : Billingsley