Théorème de Lax-Milgram et application

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle qu'il existe deux constantes a_*, a^* vérifiant :*

$$\forall u, v \in H,\ |a(u,v)| \leq a^* \|u\| \|v\|$$
$$\forall u \in H, a(u,u) \geq a_* \|u\|^2$$

Alors pour tout $L \in H^*$, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$a(u,v) = L(v)$$

Corollaire. *On se place sous les même hypothèses. Soit V un sous-espace de H, Si u est la solution du problème variationnel dans H, v la solution du même problème restreint à V, on a*

$$\|u - v\| \leq \frac{a^*}{a_*} \inf_{w \in V} \|u - w\|$$

Corollaire. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}, c \in L^\infty(\Omega)$, on suppose qu'il existe $a_* > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq a_* \|\xi\|^2$$

On pose, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i \partial_i u v + cuv$$

B est une forme bilinéaire continue et il existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$B[u,u] + \gamma_0 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{a_*}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Et donc pour tout $\gamma > \gamma_0$, $f \in L^2(\Omega)$ le problème

$$- \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i (a_{i,j} \partial_j u) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i \partial u + (c + \gamma) u = f$$

possède une unique solution variationnelle dans $H^1(\Omega)$.