Théorème de Hadamard

Théorème. *Soit* $n \geq 1$*,* $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*. Alors*

$$(F \text{ est un difféomorphisme }) \Leftrightarrow (\ F \text{ est propre et } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ DF(x) \in\ GL_n(\mathbb{R}))$$

Démonstration. L'implication directe est.. directe. On se concentre sur l'implication réciproque.
On commence par montrer le résultat pour $F \in \mathcal{C}^2$. Par théorème d'inversion locale, on sait que F est un difféomorphisme local sur un voisinage de chaque point. Par théorème d'inversion globale, il suffit de montrer que F est bijective. On va montrer que l'image réciproque de 0 par F est un singleton, ce qui conclut quitte à considérer $F - a$ pour $a \in \mathbb{R}^n$.
Soit $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ le champs de vecteur défini par

$$V(x) = -DF(x)^{-1}F(x)$$

Selon le théorème de Cauchy-Lipschitz, le flot du champs de vecteur V, noté $\varphi(t, x)$, est bien défini sur un voisinage ouvert de $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. Commençons par montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}_+$.
Par la suite, on notera $G(t, x) = F(\varphi(t, x))$. Partout où $\varphi(t, x)$ est défini, on a

$$\partial_t G(t, x) = DF(\varphi(t, x))V(\varphi(t, x)) = -G(t, x)$$

Donc

$$F(\varphi(t, x)) = e^{-t}F(x)$$

En particulier, à x fixé pour tout $t > 0$ tel que $\varphi(t, x)$ est défini, on a $|F(\varphi(t, x))| \leq |F(x)|$, donc, si on note B la boule unité fermée, on a $\varphi(t, x) \in F^{-1}(|F(x)|B)$ qui est un compact. Par théorème de prolongement des solutions (ou d'explosion en temps fini), la solution maximale $\varphi(\cdot, x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $p \in F^{-1}(0)$, on note $\mathcal{V}_p = \{x | \varphi(t, x) \underset{t \to \infty}{\to} p\}$. On va montrer que :
(i) Les $\mathcal{V}_p$ sont ouverts.
(ii) Les $\mathcal{V}_p$ sont disjoints.
(iii) Les $\mathcal{V}_p$ couvrent $\mathbb{R}^n$.
Par connexité de $\mathbb{R}^n$, on en déduira qu'il n'existe qu'un seul $\mathcal{V}_p$ et que $F^{-1}(0)$ est donc un singleton.
(i) : On fixe $p \in F^{-1}(0)$. $DF(p)$ est inversible donc par théorème d'inversion locale, il existe $\mathcal{U}_p$ un voisinage ouvert de p tel que $F_{|\mathcal{U}_p}$ est un difféomorphisme sur son image (de la forme $r_p B$, quitte à réduire $\mathcal{U}_p$).
Soit $x \in \mathcal{U}_p$, montrons que $\varphi(t, x)$ reste dans $\mathcal{U}_p$ pour $t > 0$. Comme $\varphi(t, x) \in F^{-1}(r_p B)$ pour tout $t \geq 0$, on a

$$(\varphi(t, x) \in \mathcal{U}_p) \Longleftrightarrow (\varphi(t, x) = F_{|\mathcal{U}_p}^{-1} \circ F(\varphi(t, x)))$$

Or la condition de gauche est ouverte, celle de droite est fermée, et elles sont vérifiées en $t = 0$, donc par connexité de $\mathbb{R}_+$, c'est vérifié pour tout $t \geq 0$. Enfin, $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{V}_p$ car $\varphi(t,x) = F^{-1}_{|\mathcal{U}_p}(e^{-t}F(x)) \to p$.
Soit maintenant $x \in \mathcal{V}_p$. Il existe $t > 0$ tel que $\varphi(t,x) \in \mathcal{U}_p$. $\varphi(t,\cdot)$ est continue, donc pour tout y dans un voisinage de x, $\varphi(t,y) \in \mathcal{U}_p$, d'où $y \in \mathcal{V}_p$.
(ii) : Oui par unicité de la limite.
(iii) : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\phi(t,x)$ reste dans le compact $F^{-1}(|F(x)|B)$. Quitte à extraire, il existe $t_k \to \infty$ tel que $\varphi(t_k,x)$ converge vers $p \in \mathbb{R}^n$. Mais $F(\varphi(t,x)) = e^{-t}F(x) \to 0$, donc $F(p) = 0$, et $p \in F^{-1}(0)$. Pour t_k assez grand, on a $\phi(t_k,x) \in \mathcal{U}_p$, donc $x \in \mathcal{V}_p$.

Cas où F est $\mathcal{C}^1$: Le théorème de Cauchy-Peano assure l'existence local d'un flot $\varphi(t,x)$, mais celui-ci n'est pas forcément unique ; il faut le vérifier à la main. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $y(t), z(t)$ deux solutions du problème de Cauchy de condition initiale x, et

$$I = \{t \geq 0 | y_{|[0,t]} = z_{|[0,t]}\}$$

I contient 0, est fermé par continuité de y et z, reste à vérifier qu'il est ouvert. Soit $t \in I$, $DF(y(t))$ est inversible : il existe $\mathcal{U}$ un voisinage de $y(t)$ tel que $F_{|\mathcal{U}}$ est un difféomorphisme sur son image. Il existe J un voisinage de t dans $\mathbb{R}$ tel que $y_{|J}$ et $z_{|J}$ sont à valeur dans $\mathcal{U}$. Soient $Y = F_{|U} \circ y_{|J}$ et $Z = F_{|U} \circ z_{|J}$.
$Y(t) = Z(t)$ et pour tout $s \in I$, on a $Y'(t) = -Y(t)$ et $Z'(t) = -Z'(t)$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, $Y = Z$, donc $J \subset I$, ce qui conclut.
La continuité du flot $\phi(t,\cdot)$ tombe grâce à la même méthode. $\square$