Théorème de Bloch

Théorème. *Il existe une constante $C > 0$ telle si on se donne une fonction holomorphe f définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, r) \in \mathcal{U}$, alors $f(\mathcal{U})$ contient un disque de rayon $Cr|f'(z_0)|$.*

Lemme. *Soit f une fonction holomorphe définie sur le disque unité fermé, telle que $\|f'\|_{\infty,\partial\mathbb{D}} \leq 2|f'(0)|$, alors son image contient le disque $\mathbb{D}(f(0), C|f'(0)|)$, où $C =$.*

Démonstration. On suppose $f(0) = 0$. Soit $g(z) = f(z) - f'(0)z$. La formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned}
g'(z) &= f'(z) - f'(0) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} f'(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \\
&= \int_0^1 \frac{z f'(e^{2\pi i t})}{e^{2\pi t} - z} dt
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|g'(z)| &\leq \frac{\|f'\|_{\infty,\partial\mathbb{D}} |z|}{1 - |z|} \leq \frac{2|f'(0)z|}{1 - |z|} \\
|g(z)| &\leq \int_0^1 |g'(tz)z| dt \\
&\leq 2|f'(0)| \int_0^1 \frac{t|z|^2}{1 - t|z|} dt \\
&= 2|f'(0)| \int_0^1 \frac{|z|}{1 - t|z|} - |z| dt \\
&= -2|f'(0)|(|z| + \log(1 - |z|))
\end{aligned}$$

On a donc la minoration suivante :

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |f'(0)z| - |g(z)| \\
&\geq |f'(0)|(3|z| + 2\log(1 - |z|))
\end{aligned}$$

La fonction $F(t) = 2t + 2\log(1 - t)$ est positive sur un voisinage de 0. En particulier, $F'(t) = 3 - \frac{2}{1-t}$ s'annule en $t = \frac{1}{3}$, et $F(\frac{1}{3}) = 1 - 2\log\left(\frac{3}{2}\right) =: C$. On a donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|f(\frac{1}{3}e^{i\theta})| \geq C|f'(0)|$.

Montrons que $f(\mathbb{D}(1/3))$ contient $\mathbb{D}(C|f'(0)|)$. f est une fonction holomorphe non constante et est donc ouverte. $f(0) \in \mathbb{D}(C|f'(0)|)$; selon le théorème de "passage des douanes", si $f(\mathbb{D}(1/3))$ ne contient pas $\mathbb{D}(C|f'(0)|)$, alors $\partial f(\mathbb{D}(1/3))$ rencontre $\mathbb{D}(C|f'(0)|)$.

Comme f est ouverte, $\partial f(\mathbb{D}(1/3)) \subset f(\partial\mathbb{D}(1/3))(*)$, or $f(\partial\mathbb{D}(1/3)) \cap \mathbb{D}(C|f'(0)|) = \emptyset$; absurde, d'où le résultat.

$(*)$: Soit w un point du bord, $w = \lim f(z_n)$. Si $|z_n|$ ne tend pas vers 1, alors on peut extraire une suite convergente $z_n \to z \in \mathbb{D}$, alors $f(z) = w$ et w est donc dans $f(\mathbb{D}(1/3))$; absurde, donc $z_n \to 1$ d'où $|w| \geq C|f'(0)|$.

□

Démonstration. Soit z_0 réalisant le maximum de la fonction $z \mapsto (1-|z|)|f'(z)|$, et $M := |f'(z_0)|$. Notons que z_0 est dans l'intérieur du disque et que $M \geq 1$. Soit h tel que $|h| < 1 - |z_0|$, alors pour tout z tel que $|z - z_0| = \frac{1}{2}(1-|z_0|)$, on a :

$$|f'(z)| \leq \frac{1-|z_0|}{1-|z|}|f'(z_0)| \leq 2|f'(z_0)|$$

Donc selon le résultat précédent, l'image de $\mathbb{D}(z_0, \frac{1-|z_0|}{2})$ par f contient un disque de rayon $\frac{C}{2}(1-|z_0|)|f'(z_0)| \geq \frac{C}{2}|f'(0)|$, ce qui prouve le résultat pour la constante (non optimale !) $B = \frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.094$. □

En vrac des résultats qui peuvent se montrer grâce au théorème de Bloch (moyennant un lemme, qui est que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe qui évite ± 1, alors il existe g holomorphe sur le même ouvert telle que $f(z) = \cos(\pi g(z))$.

Corollaire. *(Petit théorème de Picard) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ évitant 2 points. Alors f est constante.*

Corollaire. *(Théorème de Shottky) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts, il existe une fonction continue $A : \mathbb{C} \times [0,1[\to \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ évitant a et b, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

$$|f(z)| \leq A(|f(0)|, |z|)$$

Corollaire. *Soit Ω un ouvert de $\mathcal{C}$, $z \in \Omega$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts, on définit*

$$\mathcal{O}_{a,b,c}(\Omega, z) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) |\ \{a, b\} \subset \mathbb{C} \setminus f(\Omega),\ f(z) = c\}$$

Alors $\mathcal{O}_{a,b,c}(\Omega, z)$ est relativement compact pour la topologie de convergence localement uniforme.

Corollaire. *(Grand théorème de Picard) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*)$ avec une singularité essentielle en 0. Alors pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0, $\#(\mathbb{C} \setminus f(\mathcal{U}^*)) \in \{0, 1\}$.*

Référence : Cours de Jean Claude Sikorav :]