Structure des groupes abéliens finis

Théorème. *Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe une unique suite d'entiers $d_1|d_2..|d_n$ telle que*

$$G \cong \bigoplus_{i=1..n} \frac{\mathbb{Z}}{d_i\mathbb{Z}}.$$

Lemme. *Soient $g, h \in G$ tels que $\omega(g) \wedge \omega(h) = 1$, alors $\omega(gh) = \omega(g)\omega(h)$.*
Soit $g \in G$, on a $\omega(g^k) = \frac{\omega(g)}{k \wedge \omega(g)}$.

Lemme. *Soit $N = \bigwedge_{g \in G} \omega(g)$ l'exposant de G, il existe $g \in G$ tel que $\omega(g) = N$.*

Lemme. *Soit χ un caractère linéaire défini sur H un sous-groupe de G. Alors χ admet un prolongement $\tilde{\chi}$ à G.*

Démonstration. **Existence :**
On procède par récurrence sur le cardinal de G. Si G est trivial, c'est bon. Supposons donc $|G| > 1$. Soit N l'exposant de G, et $g_0 \in \mathbb{G}$ tel que $\omega(g_0) = N$. Soit $\zeta = \exp(2\pi i/N)$, on défini le caractère linéaire $\chi(g_0^k) = \zeta^k$ sur $\langle\zeta\rangle$; c'est un isomorphisme sur son image $\mathbb{U}_N$. χ se prolonge en $\tilde{\chi}$ un caractère linéaire sur G tout entier, et comme N est multiple de l'ordre de tout élément de G, alors $\tilde{\chi}$ est à valeur dans $\mathbb{U}_N$. On pose alors :

$$\Phi : \begin{cases} G \to \mathbb{U}_N \times G/\langle\zeta\rangle \\ g \mapsto (\tilde{\chi}(g), g \bmod \zeta) \end{cases}$$

Φ est injective et donc surjective par égalité des cardinaux : on conclut par récurrence.
Unicité :
On peut compter le nombre d'éléments de chaque ordre dans G. □