Stabilité d'un système différentiel

Théorème. *Soit $n \geq 1$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tel que $F(0) = 0$, $DF(0) = -A$ où $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{Re(z) > 0\}$. Alors 0 est attracteur au sens où pour tout x_0 dans un voisinage de 0, la solution au problème*

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0.

Démonstration. On cherche une **fonction de Lyapunov**, c'est-à-dire une fonction q définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour toute solution avec x_0 assez proche de 0, $q \circ x$ décroît.

Lemme. *Pour tout a inférieur à la partie réelle minimale des valeurs propres de A, on a l'estimation $\|e^{-tA}\| = \mathcal{O}(e^{-ta})$.*

Démonstration. Soit $a > 0$ un tel réel, $\lambda_1, .., \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A, du multiplicité respectives $m_1, .., m_r$. Soit $F_i = Ker((A - \lambda_i I)^{m_i})$ l'espace caractéristique associé. Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des Noyaux donne

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

Si $x_i \in F_i$, alors

$$\begin{aligned} \|e^{-tA} x_i\| &= e^{-tRe(\lambda_i)} \|e^{t(\lambda_i I - A)} x_i\| \\ &= e^{-t\lambda_i} \| \sum_{k=0}^{m_i} \frac{(t(\lambda_i I - A))^k}{k!} x_i \| \\ &= \mathcal{O}(e^{-ta}) \|x_i\| \end{aligned}$$

Puis, pour tout x, on décompose $x = x_1 + .. + x_r$, et comme $\sum_{i=1}^{m_r} \|x_i\|$ est une norme, alors on a le résultat recherché par équivalence des normes. □

On introduit la forme quadratique

$$q(x) = \int_0^\infty \|e^{-sA} x\|^2 ds$$

Ainsi que sa forme polaire :

$$b(x, y) = \int_0^\infty \langle e^{-sA} x, e^{-sA} y \rangle ds$$

Ceux-ci sont bien définis grâce au lemme qui permet de dominer les intégrandes par des fonctions intégrables. De plus, q est définie positive (car l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle). q est donc le carré d'une norme, et il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\|^2 \geq \alpha q(x)$ pour tout x. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout x dans la boule fermée de q rayon δ de centre 0, on a $\sqrt{q(F(x) + Ax)} \leq \frac{\alpha}{4}\sqrt{q(x)}$. Soit enfin $x_0 \in B_q(0, \delta/2)$, et $x(t)$ la solution maximal du problème de Cauchy associé. On note $T > 0$ le temps de sortie de la boule de rayon δ, éventuellement infini. Par théorème d'explosion en temps fini, il suffit de montrer que $\forall t < T$, $q(x(t)) \leq \delta/2$, ce qui montre que la solution maximale est définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On montre ensuite que cette solution tend vers 0 à vitesse exponentielle.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(q(x(t))) &= 2b(x(t), F(x(t))) \\
&= 2b(x(t), -Ax(t)) + 2b(x(t), Ax(t) + F(x(t))) \\
&= -\|x(t)\|^2 + 2\sqrt{q(x(t))q(Ax(t) + F(x(t)))} \\
&\leq -\alpha q(x(t)) + \frac{\alpha}{2}q(x(t)) \\
&= -\frac{\alpha}{2}q(x(t))
\end{aligned}$$

Donc $q \circ x$ décroît, ce qui prouve la première partie. On a alors $q(x(t)) \leq e^{-t\alpha/2}q(x_0)$, ce qui conclut. $\square$