Sphère de $M_2(\mathbb{R})$

On munie $M_2(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme $\|.\|_2$ de $\mathbb{R}^2$. On note B la boule unité fermée de $M_2(\mathbb{R})$ et Σ la sphère unité de $M_2(\mathbb{R})$. On note aussi R l'ensemble des rotations et S l'ensemble des symétries orthogonales. On notera r_θ (resp s_θ) la rotation (resp symétrie) d'angle θ. On notera aussi $\mathbb{D}$ le disque unité complexe fermé et $\mathbb{S}^1$ son bord.

Lemme. *Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale positive telle que $M = UDV$.*

Démonstration. Soit S, O une décomposition polaire de M (non nécessairement unique car on ne suppose pas M inversible). Selon le théorème spectral, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = UDU^*$ où D est une diagonale positive. Avec $V = U^*O$, on a $M = UDV$. □

Théorème. *Σ est l'union des segment $[r, s]$ $(r, s) \in R \times S$, et deux tels segments ne peuvent s'intersecter que sur un extrémité.*
De plus, R et S sont des cercles "enlacés" dans Σ au sens où pour toute application continue $\rho : \mathbb{D} \to \Sigma$ tel que $\rho(e^{i\theta}) = r_\theta$ (resp s_θ), $\rho(\mathbb{D}) \cap S \neq \emptyset$ (res $\rho(\mathbb{D}) \cap R \neq \emptyset$).

Démonstration. On décompose la preuve en les étapes suivantes :

1/ Pour tout $[r, s]$, $(r, s) \in R \times S$, $[r, s]$ est dans Σ :
2/ Pour tout $f \in \Sigma$, $f \in [r, s]$ pour certains $(r, s) \in R \times S$.
3/ Les segments $]r, s[$ sont tous disjoints.
4/ R et S sont enlacés.

Faisons un première remarque importante par la suite : la norme subordonnée à $\|.\|_2$ est invariante par multiplication par une matrice orthogonale, à gauche et à droite.

1/ Soit $f = (1 - t)r + ts$, B est convexe et r, s sont dans Σ donc $f \in B$, on cherche $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\|fx\| = \|x\|$.
$f \in \Sigma$ ssi $r^{-1}f$ y est : on suppose sans perte de généralité que $r = id$. s est une symétrie, donc il existe $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $sx = x$. Ainsi $fx = x$, donc $f \in \Sigma$.

2/ On utilise le lemme : il existe $u, v \in O_2(\mathbb{R})$ et d diagonale positif tels que $f = udv$. $f \in \Sigma$ donc $\|d\| = 1$; l'un des coefficient diagonaux de d est donc 1, et l'autre est dans $[0, 1]$. Quitte à échanger les deux lignes, la matrice de d dans la base canonique est $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $a \in [0, 1]$.
Soit s_0 la symétrie dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. On écrit $a = 1-2t$ où $t \in [0, 1/2]$, on a alors $d = t1 + (1 - t)s_0$, donc $f = tuv + (1 - t)us_0v$, ce qui est le résultat attendu.

3/ Soit $f \in]r, s[\cap]r', s'[$. Quitte à multiplier par r^{-1}, on suppose $r' = id$. Toutes les symétries sont orthogonalement conjuguées ; quitte à conjuguer, on suppose $s' = s_0$. Alors $f_1 1 = 1$, et donc nécessairement $r_1 1 = s_1 1 = 1$; vu la forme générale des matrices de rotation et symétrie, cela entraîne que $r = id$, $s = s_0$.

4/ Pour tout $f \in \Sigma \setminus S$, f est dans un unique segment $[r, s[$; on note $i(f) = r$. Montrons que i est continue.
Soit f_n une suite de $\Sigma \setminus S$ telle que $f_n \to f \in \Sigma \setminus S$. On note $f_n = (1 - t_n)r_n + t_n s_n$ où $t_n \in [0, 1[$, $r_n \in R$, $s_n \in S$. Quitte à extraire, on suppose que $t_n \to t \in [0, 1]$, $r_n \to r \in R$, $s_n \to s \in S$. On a alors $f = (1 - t)r + ts$. Cela entraîne que $t < 1$ et que (r, t, s) sont déterminés de manière unique par f ; r_n a une seule valeur d'adhérence et est donc convergente.

Soit $\rho : \mathbb{D} \to \Sigma$ continue telle que $\rho(e^{i\theta}) = r_\theta$. Supposons que l'image de ρ n'intersecte pas S. Soit $j : \begin{cases} R \to \mathbb{S}^1 \\ r_\theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$. L'application $g = j \circ i \circ \rho$ est alors une rétraction de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{S}^1$, ce qui est impossible selon le théorème de Brouwer. On procède de même pour $\rho : \mathbb{D} \to \Sigma$ continue telle que $\rho(e^{i\theta}) = s_\theta$, ce qui achève la preuve.

$\square$

Référence : Serre