Solution paradoxale de l'équation de la chaleur

Théorème. *Il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $u(t,x)=0$ pour tout $t<0$, $u(t,\cdot)\neq 0$ pour tout $t>0$, et $\partial_t u = \Delta u$.*

Lemme. *Soit $f(t)=e^{-1/t^2}$, alors pour tout $t>0$,*

$$|f^{(n)}(t)| \leq n!\left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-b/t^2}$$

Pour une certaine constante $b>0$.

Démonstration. Pour l'estimation, on utilise le fait que f est la restriction de la fonction holomorphe e^{1-/z^2} ; on applique la formule de Cauchy au cercle de centre t de rayon $t/2$:

$$f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(t,t/2)} \frac{e^{-1/\xi^2}}{(\xi-t)^{n+1}}d\xi = n!\fint_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}\times\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{i\theta})^2}}}{(\frac{t}{2}e^{i\theta})^n}d\theta$$

On note $b(>0)$ le minimum pour $\theta\in[0,2\pi]$ de $Re\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{i\theta})^2}\right)$ (4/9 il me semble ?). On a alors, pour tout $t>0$, $n\geq 0$,

$$|f^{(n)}(t)| \leq n!\left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-b/t^2}$$

□

Démonstration. On pose

$$u(t,x) = 1_{t>0}\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Commençons par montrer que u est bien définie et continue pour $t\in\mathbb{R}_+^*$; on note $g_n(t,x) = 1_{t>0}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Soit $M>0, t_0>0$, $(t,x)\in[t_0,+\infty[\times[-M,M]$, on a :

$$|g_n(t,x)| \leq n!\left(\frac{2}{t_0}\right)^n\frac{M^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{2M^2}{t_0}\right)^n \in l^1(\mathbb{N})$$

De plus, si $x_m\to x$, $t_m\to 0$, alors en notant $M=\sup_m |x_m|$, on a pour tout m

$$|u(t,x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2M^2}{t_m}\right)^n e^{-\frac{b}{t_m^2}} = \exp\left(\frac{2M^2}{t_m}-\frac{b}{t_m^2}\right)\to 0$$

Donc u est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrons alors que u est lisse.

On commence par estimer $\partial_t^l \partial_x^p g_n$; si $|x| \leq M(>1)$, $t \geq t_0 > 0$, alors

$$|\partial_t^l \partial_x^p g_n(t,x)| = |f^{(n+l)}(t)| \frac{M^{2n-p}}{(2n-p)!} \leq \left(\frac{2M^2}{t_0}\right)^n \frac{(n+l)!}{(2n-p)!} \frac{1}{t_0^l} \in l^1(\mathbb{N})$$

Ainsi, u est lisse sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$,

$$\partial_t^l \partial_x^p u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^l \partial_x^p g_n(t,x)$$

On a montré que u était $\mathcal{C}^0$. Supposons que u est $\mathcal{C}^N$ et montrons qu'elle est alors $\mathcal{C}^{N+1}$. Si $l+p = N$ alors par hypothèse de récurrence, en approchant un point $(0,x)$ par valeur inférieur, on obtient que $\partial_t^l \partial_x^p u(0,x) = 0$. Assez directement, $\partial_t^l \partial_x^{p+1} u(0,x)$ existe et est nul. Regardons alors $\partial_t^{l+1} \partial_x^p u(0,x)$;

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0^+} \left|\frac{\partial_t^l \partial_x^p u(t,x)}{t}\right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x^2}{t}\right)^n \frac{1}{(n-l-p)!} e^{-\frac{b}{t^2}} \\
&\leq \left(\frac{2x^2}{t}\right)^{l+p} \exp\left(\frac{2x^2}{t} - \frac{b}{t^2}\right) \to 0
\end{aligned}$$

Donc les dérivées partielle en $(0,x)$ sont bien définies et nulles. Enfin, avec les même estimations que précédemment, si $t_m \to 0$, $x_m \to x$ alors $\partial_t^l \partial_x^p u(t_m, x_m) \to 0$; u admet donc des dérivées partielles continues a tout ordre et est donc $\mathcal{C}^\infty$, avec pour tout $l, p \geq 0$,

$$\partial_t^l \partial_x^p u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^l \partial_x^p g_n(t,x)$$

En particulier, u vérifie l'équation de la chaleur. Montrons enfin que u est non nulle pour tout $t > 0$: soit $t > 0$ fixé, les estimation précédentes donnent que $u(t,x)$ est une série entière selon x, et son coefficient devant x^{2n} est $\frac{1}{(2n)!} f^{(n)}(t)$. Si $u(t,\cdot)$ est nulle, alors tout les $f^{(n)}(t)$ sont nuls. Or, f est analytique sur $\mathbb{R}_+^*$, non constante, donc il n'existe pas de tel t.

□