Solution de l'équation des ondes par moyenne sphérique

Théorème. *On considère l'équation des ondes avec conditions initiales* $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ *:*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(0,x) = f(x) \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{1}$$

Soit $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$*, vérifiant cette équation, alors :*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} f(y)dS(y)\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} g(y)dS(y)$$

Démonstration. L'équation des ondes est stable par isométrie, cela nous incite à regarder des moyennes sphérique des solution. Commençons par un lemme calculatoire :

Lemme. *Soit* $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*,* $v(r) = \fint_{S_r} u(y)dS(y)$*, alors* v *vérifie*

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = \fint_{S_r} \Delta u(y)dS(y)$$

Démonstration. Notons que par un changement de variable, v s'écrit

$$v(r) = \fint_{S_1} u(rz)dS(z)$$

Donc $v'(r) = \fint_{S_1} \nabla u(rz) \cdot zdS(z) = \fint_{S_r} \nabla u(y) \cdot \nu(y)dS(z) = \frac{r}{n}\fint_{B_r} \Delta u(y)dy$ (où on a utilisé la formule de Stokes et le $\frac{r}{n}$ vient de la normalisation de l'intégrale).

$$\begin{aligned}
v''(r) &= \frac{1}{r}v'(r) + \frac{r}{n}\fint_{B_1} \nabla\Delta u(rz) \cdot zdz \\
&= \frac{1}{r}v'(r) + \frac{r}{n}\fint_{B_r} \nabla\Delta u(y) \cdot \frac{y}{r}dy \\
&= \frac{1}{r}v'(r) + \fint_{S_r} \Delta u(y)\frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r}dS(y) - \frac{r}{n}\fint_{B_r} \Delta u(y)\nabla \cdot \frac{y}{r}dy \\
&= \frac{1}{r}v'(r) + \fint_{S_r} \Delta u(y)\frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r}dS(y) - \fint_{B_r} \Delta u(y)\nabla \cdot dy & \text{car } \nabla \cdot y = n \\
&= \frac{1-n}{r}v'(r) + \fint_{S_r} \Delta u(y)dS(y)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On pose $U(t,x,r) = \fint_{S_r(x)} u(t,y)dS(y)$, et de même on définit F comme la moyenne de f, G la moyenne de g. Notons que $U(t,x,r) \to u(t,x)$ quand $r \to 0$ et de même pour F, G. Selon le lemme précédent, U vérifie :

$$\begin{cases} \partial_r^2 U + \frac{2}{r}\partial_r U = \partial_t^2 U \\ U(0,x,r) = F(x,r) \\ \partial_t U(0,x,r) = G(x,r) \end{cases}$$

Posons $\tilde{U} = rU$, $\tilde{F} = rF$, $\tilde{G} = rG$. Alors on obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_r^2 \tilde{U} = \partial_t^2 \tilde{U} \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ \tilde{U}(0,x,r) = \tilde{F}(x,r) \\ \partial_t \tilde{U}(0,x,r) = \tilde{G}(x,r) \end{cases}$$

On a de plus $\tilde{U}(t,x,0) = \tilde{F}(x,0) = \tilde{G}(x,0) = 0$. Les solutions de cette équation sont données par la formule de d'Alembert (avec réflexion) ; pour $0 < r < t$,

$$\tilde{U}(t,x,r) = \frac{\tilde{F}(x,t+r) - \tilde{F}(x,t-r)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{G}(x,s)ds$$

Et $u(t,x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\tilde{U}(t,x)$, donc on obtient la formule de Kirchoff :

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} f(y)dS(y)\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} g(y)dS(y)$$

$\square$

Référence : Evans