Quelques résultats autour du théorème de Sarkovsky

Définition. Soient I, J des segments de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on dit que I recouvre J (par f), et on note $I \rightsquigarrow J$ (où f est implicite), dès que $f(I) \supseteq J$.
On dit que $x \in I$ est de période p si $f^p(x) = x$ et pour tout $i \in \{1 \cdots p-1\}$, $f^i(x) \neq x$.

Lemme. *Si $I \rightsquigarrow I$, alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = x$.*
Si $I \rightsquigarrow J$, alors il existe $K \subset I$ un segment tel que $f(K) = J$.
Si $I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow I_p \rightsquigarrow I_0$, alors il existe $x \in I_0$ tel que, si $k \in \{1, \cdots p\}$, $f^k(x) \in I_k$ et $f^p(x) = x$.

Démonstration. Pour le premier point : c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
Pour le deuxième point : on note $J = [a, b]$. $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ sont deux ensembles compacts, qui admettent des bornes supérieures. On suppose que la plus grande est celle de $f^{-1}(b)$. Soit $c = \sup f^{-1}(a)$, $d = \inf[a, \infty[\cap f^{-1}(b)$, alors $K = [c, d]$ convient.
On choisi $K_p \subset I_p$ tel que $f(K_p) = I_0$ grâce au lemme. Puis de proche en proche $K_i \subset I_i$ tel que $f(K_i) = K_{i+1}$. On a alors $K_0 \rightsquigarrow K_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K_p \rightsquigarrow I_0$, et on applique le premier point à f^p. □

Théorème. *Soit f une fonction continue définie sur un segment de $\mathbb{R}$. Supposons que f admette un point de période 3. Alors pour tout $p \geq 1$, f admet un point de période p.*

Démonstration. On note $\{a, b, c\}$ l'orbite d'ordre 3, $a < b < c$. On suppose que $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ (l'autre cas se traite de la même manière).
On note $I_0 = [a, b]$, $I_1 = [b, c]$ notons alors que selon le théorème des valeurs intermédiaires, $I_0 \rightsquigarrow I_1$, $I_1 \rightsquigarrow I_1$, $I_1 \rightsquigarrow I_0$.
$I_1 \rightsquigarrow I_1$ donc f admet un point fixe. Supposons maintenant $p \geq 2$, on a la suite de recouvrement (avec p flèches)

$$I_0 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_1 \cdots \rightsquigarrow I_1 \rightsquigarrow I_0$$

On choisi $x \in I_0$ comme dans le lemme : $f^p(x) = x$ et pour tout $i \in \{1, .., p-1\}$, $f^i(x) \in I_1$. Supposons que f ne soit pas de période p. Alors il existe $1 \leq i \leq p-1$ tel que $f^i(x) = x$, et donc $x \in I_0 \cap I_1$, donc $x = b$. Si $p = 2$ on a alors une absurdité car b est de période 3. Si $p \geq 3$, alors $f^2(x) = a$ n'est pas dans I_1 comme attendu ; absurde. x est donc de période p. □

Remarque. *On peut faire une preuve similaire si il existe une orbite d'ordre* 4 *de la forme $x < f(x) < f^2(x) < f^3(x)$, mais pas si $x < f^2(x) < f(x) < f^3(x)$.*

On peut énoncer un résultat bien plus général : on considère l'ordre de Sarkovsky

$$\begin{aligned}
3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \\
6 \rhd 10 \rhd 14 \rhd \cdots \\
12 \rhd 20 \rhd \cdots \\
\vdots \\
\cdots 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \cdots \rhd 4 \rhd 2 \rhd 1
\end{aligned}$$

Tel que $n \rhd m$ si et seulement si pour toute fonction f continue sur un segment, si f admet un point de période n, alors elle admet un point de période m.

Référence : Katok, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems