Quaternions

On définit $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbb{H} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

Si $h \in \mathbb{H}$, on note h^* le dual de la matrice h, qui est toujours dans $\mathbb{H}$.
On note $\mathbb{I} = \{h | h^* = -h\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ les imaginaires.
Enfin, on note $N(h) = det(h) = hh^*$ (on identifie $\mathbb{R}\mathbf{1}$ à $\mathbb{R}$) la norme du vecteur h ; celle-ci correspond à la norme euclidienne sur la base canonique $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On note alors que la sphère des quaternions est $\mathbb{S} = \{h \in \mathbb{H} | N(h) = 1\} = SU(2)$. Si on représente le quaternion $\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ par (α, β), on a alors la loi de multiplication suivante (où le conjugué est un conjugué complexe) :

$$(\alpha_0, \beta_0).(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_0\alpha_1 - \bar{\beta_0}\beta_1, \beta_0\alpha_1 + \bar{\alpha_0}\beta_1)$$

Lemme. $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\boldsymbol{1}$

Démonstration. Si $h \in \mathbb{H}$ commutent avec $1, i, j, k$, alors il commute avec toutes leur combinaison linéaires **complexes**, donc avec tout $M2(\mathbb{C})$, donc c'est une homothétie. □

Théorème. *On a un isomorphisme de groupes topologiques* $PSU(2) \cong SO(3)$, *où on note* $PSU(2) := SU(2)/\{\pm I_2\} = \mathbb{S}/\{\pm I_2\}$.
De plus, la rotation d'axe u (u un vecteur unitaire) d'angle θ est donnée par le quaternion $\pm(cos(\theta/2) + sin(\theta/2)u)$ *où u est écrit dans la base* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Démonstration. $\mathbb{S}$ agit $\mathbb{R}$-linéairement sur $\mathbb{H}$ par conjugaison : $s.h := shs^{-1}$. De plus, si $h \in \mathbb{I}$, alors $(shs^{-1})^* = (s^{-1})^* h^* s^* = -shs^{-1}$, donc $\mathbb{I}$ est stable par l'action de $\mathbb{S}$. Enfin, pour tout $s \in \mathbb{S}, \ h \in \mathbb{I}$, on a $N(s.h) = N(shs^{-1}) = N(h)$, donc s agit par isométrie sur $\mathbb{I}$. Cela définit donc un morphisme

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{S} \to O(\mathbb{I}) \\ s \mapsto (h \mapsto shs^{-1}) \end{cases}$$

$\mathbb{S}$ est connexe et ϕ est continue, donc $\mathrm{Im}(\phi)$ est connexe : ϕ est donc à valeur dans $SO(\mathbb{I})$ (que l'on identifie à $SO(3)$ en identifiant $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ à la base canonique). De plus, si $\phi(s) = I_3$, alors pour tout h dans $\mathbb{I}$, $shs^{-1} = h$. Cela se prolonge à $h \in \mathbb{H}$, donc $s \in Z(\mathbb{H}) \cap \mathbb{S} = \mathbb{R} \cap \mathbb{S} = \{\pm 1\}$, et réciproquement, l'action de 1 et -1 sont triviales. Reste à montrer la surjectivité.

On montre que $\mathrm{Im}(\phi)$ contient les retournements. On considère le retournement selon le plan orthogonale au vecteur unitaire $u \in \mathbb{I}$. Notons que $u \in \mathbb{S}$, montrons alors que u agit comme le retournement recherché : $\phi(u).u = uuu^{-1} = u$ donc $\phi(u)$ est une rotation d'axe u. $u \neq \pm 1$ donc c'est une rotation non triviale. Enfin, $u^{-1} = u^*$ car $u \in \mathbb{S}$, et $u^* = -u$ car $u \in \mathbb{I}$, d'où $u^2 = -1$. On en déduit que $\phi(u)^2 = I_3$: $\phi(u)$ est bien le retournement perpendiculaire à u. □

Remarque. *Il est instructif d'expliciter l'inverse de ϕ. Soit $r(u, \theta)$ la rotation d'axe u d'angle θ, alors*

$$\phi(\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})u) = r(u, \theta)$$

Cela signifie que si $s + v \in \mathbb{S}$, alors $\phi(s + v)$ est la rotation d'angle $2\cos^{-1}(s)$ selon le vecteur $\frac{v}{\sqrt{1-s^2}}$: l'angle et surtout l'axe de rotation peuvent être lus directement sur le quaternion qui les représente. Cela offre plusieurs avantages :
- Les calculs de produits de rotations peuvent être fait sous forme quaternionique : il n'y a que 4 coefficients à retenir en mémoire alors qu'une matrice de SO(3) est la donnée de 9 coefficients.
- Dans un calcul en série de rotations, il y a une manière "canonique" de normaliser un quaternion pour en faire une rotation ($s' = s/\sqrt{N(s)}$), ce qui permet une meilleurs stabilité numérique et d'être sur de rester dans $SO(3)$.
- Il n'y a pas de blocage de cardan comme avec les angles d'Euler.
- Il est possible d'interpoler entre deux rotation en prenant le milieu de la géodésique qui relie deux éléments générique de $SO(3)$ représenté dans $\mathbb{S}$.
Source pour tout ça : Wikipedia

Un conséquence plus théorique de cet isomorphisme ϕ est que c'est un revêtement universel explicite de $SO(3)$. Cela nous apprend que $\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $SO(3, \mathbb{R})$ s'identifie en fait à $\mathbb{RP}^3$.

Référence : H2G2