Processus de Galton Watson et cas critique

On considère une suite de variable aléatoires identiques indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indexées par $\mathbb{N}^2$, notées $\xi_{i,n}$. On définie une suite de variables aléatoires (Z_n) par

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=0}^{Z_n} \xi_{i,n} \end{cases}$$

On note m l'espérance de μ, la loi des $\xi_{i,n}$, éventuellement infinie. On note $E = \cup_{n\geq 0}(Z_n = 0)$ l'évènement d'extinction.

Théorème. *Si $m < 1$, alors $P(E) = 1$.*
Si $m = 1$ et $\mu \neq \delta_1$, alors $P(E) = 1$.
Si $m > 1$, alors $P(E) < 1$.

Théorème. *On se place maintenant dans le cas critique, où $m = 1$ et $\mu \neq \delta_1$. On suppose que μ admet un moment d'ordre 2, et on appelle σ son écart type.*
Alors $P(Z_n = 0) \sim \frac{2}{\sigma n}$ et $\frac{Z_n}{n}|Z_n > 0$ converge en loi vers $\mathcal{E}(2/\sigma)$

Démonstration. Par application successive du théorème de dérivation sous le signe somme, $G \in \mathcal{C}^2([0,1])$, avec $G(1) = 1$, $G'(1) = 1$, $G''(1) = \sigma$. On a donc le développement suivant :

$$G(t) = t + \frac{\sigma}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2)$$

Soit $\phi(t) = \frac{1}{1-G(t)} - \frac{1}{1-t}$, on a alors $\phi(t) = -\frac{\sigma}{2} + \rho(t)$ où ρ est continue et $\rho(1) = 0$.

Lemme. $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-G_n(t)} - \frac{1}{1-t}\right)$ *converge uniformément vers $\frac{\sigma}{2}$.*

En effet, $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-G_n(t)} - \frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(G_k(t)) = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho(G_k(t))$.
Donc $\sup_{0\leq t<1}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-G_n(t)} - \frac{1}{1-t}\right) - \frac{\sigma}{2}\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sup_{0\leq t<1}|\rho(G_k(t))|$ Or, pour tout k, t, $G_k(0) \leq G_k(t) \leq 1$, donc $G_k(t)$ converge uniformément vers 1, d'où le résultat par théorème de Césaro, ce qui montre le lemme.

On applique le lemme en $t = 0$; $P(Z_n = 0) = 1 - G_n(0) \sim \frac{2}{\sigma n}$.
Soit W_n une variable qui suit la loi de $Z_n|Z_n > 0$, c'est-à-dire que $P(W_n = 0) = 0$ et pour tout $k > 0$, $P(W_n = k) = P(Z_n = k)/P(Z_n > 0)$. Soit L_n la transformée de Laplace de W_n/n et $t_n = e^{-t/n}$.
Alors $L_n(t) = G_{W_n}(t_n) = \frac{G_n(t_n)-G_n(0)}{1-G_n(0)} = 1 - \frac{1-G_n(t_n)}{1-G_n(0)}$.
On utilise alors l'équivalent donné par le lemme. On écrit $\frac{1}{1-G_n(t_n)} - \frac{1}{1-t_n} = \frac{n\sigma}{2} + o(n)$.
On note aussi que $1 - t_n = -t/n + o(1/n)$. On a alors :

$$L_n(t) = 1 - \frac{(1-t)n\sigma + o(n)}{2 + (1-t)n\sigma + o(n)} \to \frac{2}{2+\sigma t}$$

Ce qui est la transformée de Laplace d'une loi exponentielle de paramètre $\sigma/2$. □

Référence : Athreya, Branching Processes