Points de Lebesgue d'une fonction L^1

Théorème. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors* $\fint_{B_x(r)} |f(y) - f(x)|dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ *pour presque tout x.*

Lemme. *Soit K un compact recouvert par les boules $(B_{x_i}(r_i))_{i\in I}$. Alors il existe $J \subset I$ une partie finie telle que les $(B_{x_j}(r_j))_{j\in J}$ sont disjoints et les $(B_{x_j}(3r_j))_{j\in J}$ recouvrent K.*

Démonstration. On l'admettra pour le développement. Dans les grandes lignes, on se ramène à I fini par compacité de K, on choisi la boule de rayon maximal et on ôte toute les boules qui l'intersectent. On répète cela sur les boules restantes jusqu'à exhaustion. □

Définition.

$$\begin{aligned}
Mf(x,r) &= \fint_{B_x(r)} |f(y)|dy \\
Mf(x) &= \sup_{r>0} Mf(x,r) \\
Tf(x,r) &= \fint_{B_x(r)} |f(y) - f(x)|dy \\
Tf(x) &= \limsup_{r\to 0} Tf(x,r)
\end{aligned}$$

Lemme. *Soit $a > 0$,*

$$Leb\,(x \text{ tel que } Mf(x) > a) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{a}$$

Démonstration. On note $E_a = (x \text{ tel que } Mf(x) > a)$. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, $Leb(E_a) = \sup Leb(K)$ pour K compact inclus dans E_a.

Pour tout $x \in K$, il existe $B(x, r_x)$ une boule telle que $Mf(x, r_x) > a$. On en extrait une sous-famille finie comme dans le lemme, qu'on note $(B_j)_{j\in J}$. On a alors :

$$Leb(K) \leq 3^n \sum_{j\in J} Leb(B_j) \leq \frac{3^n}{a} \sum_{j\in J} \int_{B_j} |f(y)|dy \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{a}$$

La première inégalité vient du fait que les boules de rayon triple recouvrent K, la seconde de $Mf(x, r_x) > a$, et la troisième du fait que les B_j soient disjointes. □

On peut maintenant montrer le théorème :

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap L^1$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.
g est continue, donc $Tg = 0$. Notons $h = f - g$, un inégalité triangulaire donne

$$Th(x, r) \leq Mh(x, r) + |h(x)| \leq Mh(x) + |h(x)|$$

Ainsi, $Tf \leq Mh + |h|$. Soit $a > 0$, si $Tf(x) > 2a$, alors $Mh(x) > a$ ou $h(x) > a$. Ainsi, selon le lemme précédent (et une inégalité "de Markov" ; $Leb(x|h(x) > a) \leq \frac{\|h\|_1}{a}$),

$$Leb\,(x \text{ tel que } Tf(x) > 2a) \leq \frac{3^n + 1}{a}\varepsilon$$

Et ce pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $Tf = 0$ presque partout. □

Remarque. *On peut adapter la preuve pour le résultat avec $f \in L^1_{loc}$.*

Corollaire. *Soit A un borélien, alors $F_r(x) = \frac{Leb(A \cap B_x(r))}{Leb(B_x(r))}$ converge presque partout vers 1_A.*

Démonstration. Soit $f = 1_A$, on a :

$$|F_r(x) - f(x)| \leq Tf(x, r) \to^{r \to 0}_{p.p.} 0$$

□

Corollaire. *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $g(x) = \int_0^x f$ est dérivable presque partout et $g' \underset{p.p.}{=} f$.*

Démonstration. g est bien définie car $f \in L^1_{loc}$. De plus, selon le théorème, pour presque tout x, $\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)|dy \underset{r \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Donc, pour presque tout x, $\frac{g(x+r) - g(x)}{r} \underset{r \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$ et $\frac{g(x-r) - g(x)}{-r} \underset{r \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$; g y est donc dérivable et $g'(x) = f(x)$. □

Référence : Rudin