Pavages directs du plan

Théorème. *On se donne P un compact du plan euclidien $\mathcal{E}$ de direction E, et G un sous-groupe de $Is^+(\mathcal{E})$ tel que :*
(1) $\bigcup_{g\in G} g(P) = \mathcal{E}$
(2) $\forall g, h \in G,\ \left(g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \neq \emptyset\right) \Rightarrow (g(P) = h(P))$
Alors G est de la forme $\langle \tau_{\vec{u}}, \tau_{\vec{v}}, r_\theta \rangle$ où $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants et r_θ une rotation d'angle $\theta \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$. De plus, dans le cas $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\}$, on peut se ramener à $\vec{v} = \vec{r}_\theta(\vec{u})$.

Démonstration. On note T le groupe des translation de G, que l'on identifie à un sous-groupe de E. Montrons que T est discret.
Soit τ_n une suite de translation telle que $\tau_n \to 0$. Alors pour n assez grand, $\mathrm{Int}(\tau_n(P))$ et $\mathrm{Int}(P)$ s'intersectent, donc τ_n préserve P. Soit alors $p \in P$, si τ_n n'est pas la translation triviale, alors $\tau_n^k(p)$ sort de P quand $k \to \infty$ car P est borné. Ainsi, donc $\tau_n = 0$ à partir d'un rang.
T est alors un réseau de E (voir le lemme ci-dessous). Pour tout $\vec{w} \in T$, $r\tau_{\vec{w}}r^{-1} = \tau_{\vec{r}(\vec{w})}$, donc $\vec{G}$ stabilise T. On identifie T par une disjonction de trois cas :

$\boldsymbol{T = \{0\}}$: Pour tout $g, h \in G$, la partie linéaire de $ghg^{-1}h^{-1}$ est triviale (car $O^+(E)$ est commutatif) donc $ghg^{-1}h^{-1}$ est une translation, triviale par hypothèse. Ainsi, G est un groupe commutatif. Toutes ses rotations ont le même centre : si r est une rotation de centre O, et s une autre rotation, alors

$$s(O) = sr(O) = rs(O)$$

Donc par unicité du centre de rotation de r, $s(O) = O$. On note O ce centre de rotation commun, comme P est borné, $\sup_{p\in P}(g(p), O) < \infty$ ne dépend pas de $g \in G$. Donc $G.P \neq \mathcal{E}$.

$\boldsymbol{T = \mathbb{Z}\vec{u}}$: Si G admet des rotations non triviales, soit r une telle rotation, on a $\vec{r}(\vec{u}) \in \mathbb{Z}\vec{u}$, donc $\vec{r}(\vec{u}) = -\vec{u}$ et toutes les rotation non triviales sont d'angle π.
Soient r, s deux rotations non triviales de centres O_r, O_s, rs est une translation et $rs(O_s) = r(O_s) = O_r - \overrightarrow{O_rO_s} = O_s - 2\overrightarrow{O_rO_s}$, donc $rs = \tau_{2\overrightarrow{O_rO_s}}$.
Ainsi, les centres des rotations sont tous sur une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$. Dans le cas où il n'y a pas de tel rotation, on choisi arbitrairement une telle droite. Dans tout les cas, Δ est invariante par G et pour $R > \sup_{p\in P}(p, \Delta)$, la bande d'axe Δ définie par $\{x \in \mathcal{E} | d(x, \Delta) \leq R\}$ contient $G.P$, ce qui contredit l'hypothèse.

Il reste le cas $\boldsymbol{T = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Ils forment une base de E et pour tout rotation r d'angle θ dans G, on peut écrire la matrice de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et celle-ci est à coefficients entiers. La trace d'un endomorphisme étant indépendante de la base, on a donc $\cos(\theta) \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, 0\}$.
En particulier, $\vec{G}$ est fini donc cyclique et engendré par une rotation $\vec{r}_\theta$ où $\theta \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$

(et chaque angle correspond à un groupe distinct).
G est donc engendré par $(\tau_{\vec{u}}, \tau_{\vec{v}}, r_\theta)$.

Dans le cas où $\theta \in \{0, \pi\}$, il existe un tel groupe pour tout couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v})$.
Dans le cas où $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\}$, supposons que la base du réseau est choisie de telle sorte que $\|\vec{u}\|$ est minimal dans T. Alors $\|\vec{r_\theta}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, et $(\vec{u}, \vec{r_\theta}(\vec{u}))$ sont linéairement indépendants et forment donc une base du réseau.

Il suffit ensuite d'imaginer les dessins :].

□

Lemme. *Soit T un sous groupe discret de E. Alors T est soit trivial, soit de la forme $\mathbb{Z}\vec{u}$, soit de la forme $\mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$ où $(\vec{u}, \vec{v})$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. T est discret : il existe $R > 0$ tel que $T \cap B_R$ est un singleton, et T est donc fermé. Si T n'est pas réduit à un singleton, on peut choisir, $\vec{u} \in T$ de norme minimale.
Si $T = \mathbb{Z}\vec{u}$, c'est fini. Sinon , on choisi $\vec{v} \in T \setminus \mathbb{Z}\vec{u}$ de norme minimale. v n'est pas colinéaire à u car sinon, T est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non monogène, donc non discret.
Si $T \neq \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$, il existe $\vec{w}$ dans $T \setminus \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$. Quitte à translater $\vec{w}$ par $\vec{u}, \vec{v}$, il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = t\vec{u} + s\vec{v}$ avec $0 \leq t, s \leq 1/2$. Mais alors :

$$0 < \|\vec{w}\|^2 < t^2\|\vec{u}\|^2 + s^2\|\vec{v}\|^2 + 2st\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq (s+t)^2\|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

.
Où la deuxième inégalité est stricte car u et v sont linéairement indépendants. C'est absurde par minimalité de $\vec{u}$. Donc $s = t = 0$, ce qui conclut la preuve.

□

Référence : Berger