Optimisation dans un espace de Hilbert

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, coercive ($f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). Alors J admet un minimum.*

Remarque. *Au lieu de supposer f continue, on a juste besoin qu'elle soit semi-continue inférieurement, c'est à dire que les $\{x|f(x) > a\}$ soient ouverts.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de H telle que $f(x_n) \to \inf f$. Comme f est coercive, $(x_n)_n$ est bornée par $M > 0$. Pour extraire de (x_n) une suite convergente, on aimerai déjà supposer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, (x_n, x_p) converge quand n tend vers l'infini. Montrons que c'est vrai après extraction.

En effet, (x_n, x_1) est borné par M^2 ; selon le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe ϕ_1 une extraction telle que $(x_{\phi_1(n)}, x_1)$ converge.
$(x_{\phi_1(n)}, x_2)$ est bornée et il existe une extraction ϕ_2 de ϕ_1 (c'est-à-dire, qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\phi_2 = \phi_1 \circ \psi$) telle que $(x_{\phi_2(n)}, x_2)$ converge. On construit ainsi, par extraction successives, des extractions ϕ_p telles que $(x_{\phi_p(n)}, x_p)$ converge.
Soit $\phi(n) = \phi_n(n)$, alors pour tout $p > 0$, $(\phi(n))_{n\geq p}$ est une extraction de $(\phi_p(n))_{n\geq 1}$, donc $(x_{\phi(n)}, x_p)$ converge. Quitte à ne garder que les termes extrait, on a donc la propriété que pour tout $p \geq 1$, $((x_n, x_p))_{n\geq 0}$ converge.

Ainsi, pour tout $x \in Vect(x_p, p \geq 1)$, (x_n, x) converge. Soit F l'adhérence de $Vect(x_p, p \geq 1)$, $y \in F$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in Vect(x_p, p \geq 1)$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. (x_n, x) converge, donc il existe $N > 0$ tel que pour tout $n, m > N$, $|(x_n, x) - (x_m, x)| \leq \varepsilon$.
Mais alors, pour tout $n, m \geq N$, $|(x_n, y) - (x_m, y)| \leq (2M + 1)\varepsilon$. Donc $((x_n, y))_n$ est de Cauchy et converge.

Pour tout $z \in F^\perp$, (x_n, z) est constant égal à 0. Ainsi, pour tout $x \in H$, (x_n, x) converge vers une limite $L(x) \in \mathbb{R}$. L est linéaire car pour tout n, $(x_n, \lambda x + \mu y) = \lambda(x_n, x) + \mu(x_n, y)$. L est continue car pour tout n, $|(x_n, x)| \leq M\|x\|$. Donc L est une forme linéaire continue et selon le théorème de représentation de Riesz, il existe $x^* \in H$ tel que $L = (x^*, \cdot)$. On dit que x_n converge vers x^* au sens faible.

Soit $a > \inf f$, $C_a = \{x|f(x) \leq a\}$ est un fermé convexe par hypothèse. Comme $f(x_n) < a$ à partir d'un rang, $x_n \in C_a$ à partir d'un rang. Soit p_a la projection orthogonale sur C_a. Ainsi, à partir de ce rang, $(x^* - p_a(x^*), x_n - p(x^*)) \leq 0$. Quand $n \to \infty$, on obtient $\|x^* - p_a(x^*)\| \leq 0$, donc x^* est dans tous les C_a. Donc $f(x^*) = \inf f$ (et $\inf f > -\infty$, ce qui n'était pas évident !).
Dans le cas où f est strictement convexe, ce minimum est unique. □

Référence : Allaire