Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, théorème de Polya

Théorème. *Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes, à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ telles que $\mathbb{P}[X_1 = \pm e_i] = \frac{1}{2d}$. On note $S_n = X_1 + .. + X_n$. Alors*

$$\begin{cases} S_n \underset{p.s.}{\to} \infty \text{ si } d \geq 3 \\ \mathbb{P}[\limsup(S_n = 0)] = 1 \text{ si } d \leq 2 \end{cases}$$

Démonstration. On note φ_{S_n} la fonction caractéristique de S_n, φ celle de X_1, vues comme des fonction 2π-périodiques dans chaque direction. On a

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2d}(e^{it_k} + e^{-it_k}) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos(t_k)$$

Les X_i sont indépendantes, donc $\varphi_{S_n} = \varphi^n$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{P}[S_n = x] = \fint_{[-\pi,\pi]^d} e^{-itx}\varphi(t)^n dt$$

En effet, il suffit d'écrire $\varphi^n(t) = \varphi_{S_n}(t)$ comme une somme finie et de permuter somme et intégrale.

Soit $N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{S_n=0}$ le nombre de passages en 0.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_n = 0] && \text{(convergence monotone)} \\
&= \lim_{\lambda\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n \mathbb{P}[S_n = 0] && \text{(convergence monotone)} \\
&= \lim_{\lambda\to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \fint_{[-\pi,\pi]^d} (\lambda\varphi(t))^n dt && \text{(formule précédente)} \\
&= \lim_{\lambda\to 1^-} \fint_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\varphi(t))^n dt && \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \lim_{\lambda\to 1^-} \fint_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dt}{1-\lambda\varphi(t)} dt && \text{(somme d'une série géométrique)} \\
&= \fint_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dt}{1-\varphi(t)} dt && \text{(convergence monotone sur } \varphi \geq 0, \\
& && \text{dominée sur le complémentaire)}
\end{aligned}$$

Comme φ est une fonction continue qui n'atteint la valeur 1 qu'en $t = 0$, la finitude de la somme précédente est exactement donnée par l'intégrabilité de $(1-\varphi)^{-1}$ au voisinage de 0.
Si $d \geq 3$, alors comme $\cos(u) \leq 1 - \frac{1}{3}u^2$ sur un voisinage de 0, on a $1 - \varphi(t) \geq \frac{1}{3d}\|t\|_2^2$ sur un voisinage de 0. Or,

$$\int_{B(0,R)} \frac{dt}{\|t\|_2^2} = \int_0^R s_d r^{d-1} \frac{dr}{r^2} < \infty$$

Où s_d est la surface de la sphère en dimension d. Ainsi, $\mathbb{E}[N] < \infty$; (S_n) passe presque sûrement un nombre fini de fois en 0. Comme, selon la formule précédente, $\mathbb{P}[S_n = x] \leq \mathbb{P}[S_n = 0]$, on conclut que (S_n) passe presque sûrement un nombre fini de fois sur tout borné, et diverge donc presque sûrement.

Si $d \leq 2$, alors comme $\cos(u) \geq 1 - \frac{u^2}{2}$, on a $1 - \varphi(t) \leq \frac{1}{2d}\|t\|_2^2$, qui n'est pas intégrable, par le même changement de variable polaire que précédemment. Ainsi, l'espérance de N est infinie. Montrons que N est presque sûrement infini en montrant que N suit une loi géométrique de paramètre d'échec q, qui vaut donc 0.
On pose $q = \mathbb{P}[\exists n \text{ tel que } S_n = 0]$. La remarque importante est que $S_{n+m}|(S_n = 0)$ suit la même loi que S_m. On peut ainsi calculer par récurrence $\mathbb{P}[N = k] = q^k(1-q)$. D'où le résultat. $\square$