Méthode QR

Commençons par un résultat sur la décomposition QR, que l'on admet.

Théorème. *Soit $T_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale strictement positive. On a un homéomorphisme :*

$$\begin{cases} U_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \\ Q, R \mapsto QR \end{cases}$$

De plus, on peut construire l'application inverse.

Théorème. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, on suppose que ses valeurs propres sont de module distincts et on les classe par module décroissant. On construit la suite*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ et P^{-1} admet une décomposition $L - U$.
Alors la diagonale de A_k converge vers $(\lambda_1, .., \lambda_n)$, et les coefficients sous la diagonale tendent vers 0.

Démonstration. On note $Q^{(k)} = Q_1..Q_k$, $R^{(k)} = R_k..R_1$, on a les relation suivantes :

$$A^k = Q^{(k)} R^{(k)}$$
$$A_k = Q^{(k)*} A Q^{(k)}$$

Cela se montre aisément par récurrence, en notant que $Q^{(k)} R_k = AQ^{(k-1)}$.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où D est la diagonale des valeurs propres classées par module décroissants. On note $P = QR$ la décomposition QR de P et on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU (ce qui est vrai pour toute matrice "générique"). L'idée va être alors d'écrire la décomposition QR de A^k pour identifier $Q^{(k)}$, et donc A_k grâce à la seconde formule ci-dessus.

$$\begin{aligned} A^k &= QRD^k LU \\ &= QR(D^k L D^{-k}) D^k U \end{aligned}$$

Comme L est triangulaire inférieure et les modules de la diagonale D sont strictement décroissant, et que les coefficients diagonaux de L sont 1, on en déduit que $D^k L D^{-k} \to I$. Soit $O_k T_k$ la décomposition QR de $RD^k L D^{-k} R^{-1}$, comme la décomposition QR est un homéomorphisme, O_k et T_k convergent vers l'identité. On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} A^k &= (QO_k)(T_k RLU) \\ &= (QO_k \Delta \Delta_D^k)(\Delta \Delta_D^k T_k RLU) \qquad \text{où } \Delta = sign(Diag(L)), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_D = sign(Diag(U)) \end{aligned}$$

On peut donc identifier $Q^{(k)} = QO_k\Delta\Delta_D^k$.

$$\begin{aligned} A_k &= \Delta_D^k \Delta O_k^* Q^* A Q O_k \Delta\Delta_D^k \\ &= \Delta\Delta_D^k O_k^* R^{-1} D R O_k \Delta\Delta_D^k \end{aligned}$$

Or, comme $O_k \to I$, on a $diag(A_k) = diag(O_k^* R^{-1} D R O_k) \to diag(R^{-1}DR) = diag(D)$, d'où le résultat. $\square$

Référence : Serre, Ciarlet