Lemme de Morse

Théorème. *Soit $F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^3$ et $x_c \in \mathcal{U}$ tel que $DF(x_c) = 0$ et $D^2F(x_c) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de x_c dans $\mathcal{U}$ et $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$,*

$$f(x) - f(x_c) = \psi(x)_1^2 + .. + \psi(x)_p^2 - \psi(x)_{p+1}^2 - .. - \psi(x)_n^2$$

où $(p, n-p)$ est la signature de $D^2F(x_c)$.

On supposera $x_c = F(x_c) = 0$, et on note $S_0 = D^2F(x_c)$.

Lemme. *Il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de S_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathcal{V} \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que*

$$\forall S \in \mathcal{V},\ S = \phi(S)^* S_0 \phi(S)$$

Démonstration. On considère la fonction $G : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ P \mapsto P^* S_0 P \end{cases}$. G est $\mathcal{C}^\infty$, $G(I_n) = S_0$ et $DG(I_n) : H \mapsto H^* S_0 + S_0 H$.

Ainsi, $H \in \mathrm{Ker}(DG(I_n))$ si et seulement si $H \in S_0^{-1} A_n(\mathbb{R})$. Considérons le sous-espace affine $W = I_n + S_0^{-1} S_n(\mathbb{R})$, W est transverse à $\mathrm{Ker}(DG(I_n))$.

Ainsi, $D(G_{|W})(I_n) = DG(I_n)_{|S_0^{-1}S_n(\mathbb{R})}$ est injective, donc bijective par égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée. Selon le théorème d'inversion locale, il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de S_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\phi : \mathcal{V} \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeur dans W telle que

$$\forall S \in \mathcal{V},\ S = \phi(S)^* S_0 \phi(S).$$

□

On peut maintenant prouver le théorème :

Démonstration. On fixe une fonction ϕ comme ci-dessus. F est $\mathcal{C}^3$; on écrit son développement de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 (On rappelle que $x_c = F(x_c) = 0,\ DF(x_c) = 0$).

$$F(x) = \int_0^1 (1-t) \left(x^* D^2F(tx) x \right) dt = x^* S(x) x$$

Où $S(x) := \int_0^1 (1-t) D^2F(tx) dt$. Comme F est $\mathcal{C}^3$, $S(\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$. De plus, $S(0) = S_0$: pour x dans un voisinage de 0, $S(x)$ est dans $\mathcal{V}$ et on peut écrire :

$$F(x) = (\phi(S(x))x)^* S_0 (\phi(S(x))x)$$

Posons alors $\psi(x) = \phi(S(x))x$. ψ est définie au voisinage de 0, et :

$$D\psi(0) = D(\phi \circ S)(0) \times 0 + (\phi \circ S)(0) \times I_n = I_n$$

Donc selon le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local, ce qui conclut la preuve.

$\square$

Corollaire. *Soit* $F(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. $C = F^{-1}(0)$ *est le folium de Descartes, et* F *est une submersion en chaque point de* C *sauf* $(0,0)$. *Il existe* U *un voisinage de* C *et* V *un voisinage de* 0, *et* $\psi : U \to V$ *un* $\mathcal{C}^\infty$ *difféomorphisme, tel que* $\psi(C \cap U) = (\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2) \cap V$.

Démonstration. La première partie de la preuve est directe car DF ne s'annule pas sauf en $(0,0)$.
$(0,0)$ est un point critique de F, non dégénéré car $HessF(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. La signature de cette matrice est $(1,1)$, donc par un changement de coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$ donné par le théorème de Morse, on a $f(x_1, x_2) = y_1 y_2$ au voisinage de 0, d'où le résultat. $\square$