Isomorphismes de groupes linéaires

Théorème. *On a les isomorphismes suivants :*

$$PGL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$
$$PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$$
$$PGL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$$
$$PGL_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$$

Démonstration. L'action de $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ est fidèle, et induit donc un morphisme injectif $PGL_2(\mathbb{F}_q) \to S(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$. On a $\#PGL_2(\mathbb{F}_q) = (q^2-1)q$ et $\#S(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) = (q+1)!$.

q	$(q^2-1)q$	$(q+1)!$
2	6	6
3	24	24
4	60	120
5	120	720

Pour $q = 2, 3$, on a notre isomorphisme. Pour $q = 4$, on obtient que $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous-groupe G d'indice 2 dans S_5. Il contient en particulier les 3-cycles (on rappelle que $(ijk) = (ikj)^2$), qui engendrent A_5 qui est aussi d'indice 2, d'où le résultat.

Pour $q = 5$, on obtient que $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous-groupe G d'indice 6 dans S_6. De plus, $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ ne fixe aucune droite, donc G agit sans points fixes sur $\{1..6\}$.

On considère l'action de S_6 sur S_6/G par transition.
Cela induit un morphisme $\varphi : S_6 \to S(S_6/G) \cong S_6$. Notons que G fixe G par transition, donc $\varphi(G)$ est inclus dans un groupe de permutation qui fixe un élément (isomorphe à S_5). De plus, $\ker(\varphi) \subset G$, et comme $\ker(\varphi) \in \{0, A_6, S_6\}$, on a donc $\ker(\varphi) = 0$: φ est injective et par un argument de cardinal, G est isomorphe à S_5. □

Remarque. *G est un sous-groupe de S_6 d'indice 6 qui ne fixe aucun éléments ; on peut se demander si il existe dans S_n un sous-groupe d'indice n qui ne fixe aucun élément. Il n'existe pas de tel groupe sauf pour $n = 4, 6$; pour $n = 4$, c'est dû au fait que S_4 admette d'autres sous-groupes distingués, et pour $n = 6$, que S_6 admette des automorphismes non-intérieur (l'isomorphisme φ de la preuve en est un exemple).*

Référence : H2G2, Perrin