Inégalités de Weyl

Soit E un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n. Si S est une matrice symétrique (ou hermitienne). On note $\lambda_1(S) \leq .. \leq \lambda_n(S)$ ses valeurs propres. On note E_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. On note S la sphère unité de E pour la norme euclidienne.

Théorème. *Soit M hermitienne sur E, on a les formules de min-max suivantes :*

$$\begin{aligned}\lambda_k(M) &= \min_{F \in E_k} \max_{x \in F \cap S} x^* M x \\ &= \max_{F \in E_{n-k+1}} \min_{x \in F \cap S} x^* M x\end{aligned}$$

Si M et N sont hermitiennes, on en déduit les inégalités de Weyl :

$$\begin{aligned}&\lambda_i(M) + \lambda_j(N) \geq \lambda_k(M+N) && \text{où } i+j = n+k \\ &\lambda_i(M) + \lambda_j(N) \leq \lambda_k(M+N) && \text{où } i+j = 1+k\end{aligned}$$

Corollaire. *Pour tout $k = 1..n$,* $\begin{cases} H_n(K) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \lambda_k(M) \end{cases}$ *est 1-Lipschitzienne.*

Démonstration. Notons que la première formule implique la deuxième. En effet, $\lambda_k(-M) = -\lambda_{n-k+1}(M)$, donc

$$\begin{aligned}\lambda_k(M) &= -\lambda_{n-k+1}(-M) \\ &= -\min_{F \in E_k} \max_{x \in F \cap S} -x^* M x \\ &= \max_{F \in E_{n-k+1}} \min_{x \in F \cap S} x^* M x\end{aligned}$$

De même pour les inégalités de Weyl. Si $i + j = k + 1$, alors $(n+1-i) + (n+1-j) = n + (n+1-k)$, donc

$$\begin{aligned}\lambda_i(M) + \lambda_j(N) &= -\lambda_{n+1-i}(M) - \lambda_{n+1-j}(N) \\ &\leq -\lambda_{n+1-k}(M+N) = \lambda_k(M+N)\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer la première formule de min-max et la première inégalité.
M est hermitienne, donc selon le théorème spectral, il existe $(f_1, ..f_n)$ une base orthonormée de E telle que $Mf_i = \lambda_i(M) f_i$ pour tout i. Soit alors $F = Vect(f_1..f_k) \in E_k$, pour tout $x = \sum_{i=1}^k x_i f_i \in F$, on a :

$$x^* M x = \sum_{i=1}^k \lambda_i(M)|x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^k \lambda_k(M)|x_i|^2 = \lambda_k(M)$$

Et $\lambda_k(M)$ est atteint pour $x = f_k$, d'où $\min_{F\in E_k} \max_{x\in F\cap S} x^*Mx \leq \lambda_k(M)$.
Réciproquement, soit $F \in E_k$ quelconque, et $G = Vect(f_k, f_{k+1}, .., f_n)$. G est de dimension $n-k+1$, et la formule de Grassmann donne :

$$\dim(F\cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \geq k + (n+1-k) - n = 1$$

Donc il existe $x \in S\cap(F\cap G)$, et par le même raisonnement que précédemment, on a alors $x * Mx \geq \lambda_k(M)$, donc pour tout $F \in E_k$, $\max_{x\in F\cap S} x^*Mx \geq \lambda_k(M)$, d'où le résultat.

On peut maintenant montrer l'inégalité de Weyl pour le cas $i+j = n+k$. On utilise la première formule de min-max pour fixer $F \in E_i$, $G \in E_j$ tels que $\lambda_i(M) = \max_{x\in F\cap S} x^*Mx$ et $\lambda_j(N) = \max_{x\in G\cap S} x^*Nx$. Soit $H \in E_{n+1-k}$. Grâce à la seconde formule de min-max, il de montrer que

$$\min_{x\in H\cap S} x^*(M+N)x \leq \lambda_i(M) + \lambda_j(N)$$

Par application successive de la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned}
\dim(F\cap G\cap H) &= \dim(F\cap G) + \dim(H) - \dim(F\cap G + H) \\
&= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F+G) - \dim(F\cap G + H) \\
&\geq i + j + (n+1-k) - 2n = 1
\end{aligned}$$

Donc $S\cap(F\cap G\cap H) \neq \emptyset$ et contient donc un élément x. Alors

$$x^*(M+N)x = x^*Mx + X^*Nx \leq \lambda_i(M) + \lambda_j(N)$$

Ce qui achève la preuve.

Preuve du corollaire : Notons que $\|M\| = \max(\lambda_n(M), -\lambda_1(M))$. On veut montrer

$$\lambda_1(M-N) \leq \lambda_k(M) - \lambda_k(N) \leq \lambda_n(M-N)$$

La seconde inégalité de Weyl donne la première inégalité et vice et versa. La première inégalité donne λ_1 concave, la deuxième donne λ_n convexe. □

Remarque. *Ce résultat donne des conditions sur des triplet, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ pour qu'il existe M, N hermitiennes telles que $\lambda = Sp(M)$, $\mu = Sp(N)$, $\nu = Sp(M+N)$. Il existe d'autre relations de ce type, et la conjecture de Horn, résolue dans les années 80, est qu'il existe un nombre fini de telles relations qui définissent entièrement les triplets possibles. Les inégalités de Weyl ne suffisent pas, pour $n = 3$ on a par exemple $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_3 \leq \nu_2 + \nu_3$.*

Référence : Serre

Référence : Tauvel