Inégalité de Hoeffding et loi bornée des grands nombres

Théorème. *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes centrées bornées par la suite* $(c_i)_{i\geq 1}$*. Soit* $S_n = X_1 + .. + X_n$*. Alors por tout* $\varepsilon > 0$*, on a*

$$\mathbb{P}[S_n > \varepsilon] \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

Démonstration. Soit $a > 0$ que l'on fixera plus tard, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(e^{aS_n} \geq e^{a\varepsilon}) \\ &\leq e^{-a\varepsilon}\mathbb{E}[e^{aS_n}] \\ &= e^{-a\varepsilon}\prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{aX_k}]\end{aligned}$$

Or, $e^{aX_k} = e^{ac_k\frac{X_k}{c_k}} \leq \frac{1+\frac{X_k}{c_k}}{2}e^{ac_k} + \frac{1-\frac{X_k}{c_k}}{2}e^{-ac_k}$ par convexité de l'exponentielle. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) &\leq e^{-a\varepsilon}\prod_{k=1}^n \cosh(ac_k) \\ &\leq e^{-a\varepsilon}\prod_{k=1}^n e^{(\frac{1}{2}a^2c_k^2)} \\ &= \exp\left(-a\varepsilon + \frac{1}{2}a^2\sum_{k=1}^n c_k^2\right)\end{aligned}$$

Avec $a = \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^n c_k^2}$, on obtient l'inégalité attendue. □

Corollaire. *Soit* X_i *une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, bornées par* $c > 0$*, et* $S_n = X_1 + .. + X_n$*. On a alors*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log(n)}}\right) \underset{p.p.}{\leq} c$$

Et

$$\mathbb{P}\left[\forall k \geq n,\ \frac{|S_k|}{k} < \sqrt{\frac{2\log(k)}{k}(1+\varepsilon)c}\right] \geq 1 - \frac{2}{\varepsilon n^{\varepsilon}}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Hoeffding donne :

$$\mathbb{P}\left[|S_k| \geq \sqrt{2k\log(k)(1+\varepsilon)c}\right] \leq \frac{2}{n^{1+\varepsilon}}$$

Qui est sommable ; ainsi, selon le théorème de Borel-Cantelli, l'événement ci-dessus n'arrive presque surement qu'un nombre fini de fois, d'où le premier résultat.
Une comparaison série-intégrale donne le second résultat. □