Image numérique elliptique

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $W(A) = \{X^*AX,\ \text{où } X \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } X^*X = 1\}$ son image numérique.

Théorème. *Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$, alors $W(A)$ est une ellipse pleine (éventuellement dégénérée).*

Démonstration. Notons déjà que W est invariant par similitude unitaire ; en effet, pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in U_n(\mathbb{C})$, X tel que $X^*X = 1$, on a $X^*(U^*AU)X = (UX)^*A(UX)$ et $X \mapsto UX$ est une bijection de la sphère complexe d'où $W(U^*AU) = W(A)$. Selon le théorème de Schur, toute matrice complexe est unitairement trigonalisable ; on se ramène au cas où A est triangulaire.

Notons aussi que $X^*(A-\lambda I)X = X^*AX - \lambda$ donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $W(A-\lambda I) = W(A) - \lambda$ (translation de l'image numérique). De même, pour tout $\alpha \neq 0$, $W(\alpha A) = \alpha W(A)$ (homothétie et rotation de l'image numérique). Nous n'utiliserons cela que pour $|\alpha| = 1$ pour préserver les dimensions des ellipses.

Ces transformations géométriques préservent la propriété d'être une ellipse, et on peut ainsi se ramener à l'étude de $W(A)$ dans le cas où $Tr(A) = 0$ par translation, et où ses valeurs propres sont soit 0, soit $\pm\lambda$ où $\lambda > 0$. On distingue alors 3 cas (en plus du cas nul où $W(A) = \{0\}$) :

1/ Cas diagonal $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda > 0$.

$X \in \mathbb{C}^2$ vérifie $X^*X = 1$ si et seulement si il existe $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $X = \begin{bmatrix} e^{i\alpha}\cos(\theta) \\ e^{i\beta}\sin(\theta) \end{bmatrix}$.
Alors $W(A) = \{\lambda(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{\lambda\cos(2\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = [-\lambda, \lambda]$.

2/ Cas du spectre nul $A = \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a > 0$.

Notons que si A est une matrice de spectre nul, elle est unitairement semblable à la matrice ci-dessus pour un unique $a > 0$; en effet, elle est trigonalisable et en conjuguant par une matrice unitaire $\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on se ramène à $a > 0$. Réciproquement a est unique car $\det\left(\frac{A+A^*}{2}\right) = -a^2$ est invariant par similitude unitaire.

Avec les même notations que précédemment,

$$W(A) = \{2ae^{i(\beta-\alpha)}\cos(\theta)\sin(\theta),\ \theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{ae^{i(\beta-\alpha)}\sin(2\theta),\ \theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{D}_a$$

3/ Le troisième cas $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2a \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$, $\lambda, a > 0$ (cette condition est toujours possible par changement de variable unitaire).

On note $Re(A) = \frac{A+A^*}{2}$ et $Im(A) = \frac{A-A^*}{2i}$, notons que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ tel que $x^*x = 1$, on a $Re(x^*Ax) = x^*Re(A)x$ et $Im(x^*Ax) = x^*Im(A)x$.
Soit $\gamma > 0$, on pose $A_\gamma = Re(A) + i\gamma Im(A)$, on a :

$$(x + iy \in W(A)) \Leftrightarrow (x + i\gamma y \in W(A_\gamma))$$

Pour tout γ, $Tr(A_\gamma) = 0$. Cherchons γ tel que $\det(A_\gamma) = 0$ pour se ramener au cas précédent.

$$\begin{aligned}\det(A_\gamma) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & (1+\gamma)a \\ (1-\gamma)a & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^2 - (1-\gamma^2)a^2 \\ &= 0 \text{ pour } \gamma^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\end{aligned}$$

On fixe alors $\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}$. A_γ est de spectre nul donc unitairement semblable à une matrice de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où b vérifie :

$$\det(Re(A_\gamma)) = -b^2$$

Or, $Re(A_\gamma) = Re(A) = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ a & -\lambda \end{bmatrix}$, donc $b = \sqrt{\lambda^2 + a^2}$.
$W(A_\gamma)$ est donc le disque centré de rayon $\sqrt{\lambda^2 + a^2}$, et la relation entre $W(A)$ et $W(A_\gamma)$ donne $(x + iy \in W(A))$ ssi $(x + i\gamma y \in W(A))$ ssi $(x^2 + \gamma^2 y^2 = \lambda^2 + a^2)$, donc

$$W(A) = \{x + iy \text{ tels que } \frac{x^2}{\lambda^2 + a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1\}$$

C'est une ellipse de longueur (selon x) $\sqrt{\lambda^2 + a^2}$ et de largeur (selon y) a.

Remarque. *On peut montrer qu'il s'agit de l'ellipse de foyer $\pm\lambda$ de distance moyenne $\sqrt{\lambda^2 + a^2}$, c'est-à-dire que $W(A) = \{z$ tels que $\frac{1}{2}(d(z,\lambda) + d(z,-\lambda)) \leq \sqrt{a^2 + \lambda^2}\}$. Son aire est donnée par $\pi a\sqrt{\lambda^2 + a^2}$.*
De manière générale, $W(A)$ est donc une ellipse pleine de foyers $Sp(A)$.

□

Corollaire. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $W(A)$ est un convexe de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soient X^*AX et Y^*AY dans $W(A)$ (avec $X^*X = Y^*Y = 1$). Si X et Y sont linéairement liés, alors $X^*AX = Y^*AY$ et il n'y a rien à prouver. Sinon, on note $\Pi = Vect(X, Y)$ le plan engendré et P la projection orthogonale sur Π.
$P \circ A$ restreint à Π est un endomorphisme de Π et pour tout $Z \in \Pi$ tel que $Z^*Z = 1$, on a $Z^*AZ = Z^*(PA)Z$, donc $W(A)$ contient $W(P \circ A_{|\Pi})$, qui est une ellipse selon le résultat précédent, et est donc convexe.
En particulier, pour tout $t \in [0, 1]$, $tX^*AX + (1-t)Y^*AY \in W(A)$. □